详细解答

STEP II 2018，第 13 题

概率与统计 • 递推关系

STEP II 2018，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

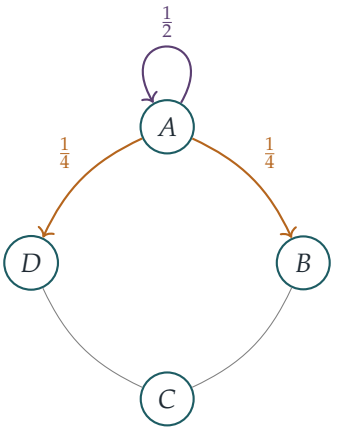
step.maths.org/questions/18-s2-q13

关键思路

无论包裹在谁手上，下一下哨声都按固定规则移动它，因此 A_{n+1}、B_{n+1}、C_{n+1}、D_{n+1} 每一个都是 A_n、B_n、C_n、D_n 的固定组合。四条互相耦合的递推关系（recurrence）看似令人生畏，但选对组合（相对两个小孩的和与差），每个组合都各自满足一条只有一行的递推关系，而这些我们可以即时解出。

解答

为围成一圈的小孩标上名字。每次吹哨时，持有包裹的人以概率 $\frac{1}{2}$ 保留包裹，并以概率 $\frac{1}{4}$ 传给每一位相邻的小孩；注意，按题目的设置，顺时针与逆时针传递的可能性相同。



图中显示由 A 出发的各种移动；每个小孩处的模式都一样。

第 (i) 部分

由 A 开始，吹哨一次后

$$A_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad B_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad C_1 = 0, \qquad D_1 = \tfrac{1}{4},$$

因为 C 与 A 相隔两个位置，一步之内无法到达。

要在第二次吹哨后落在某个小孩手上，包裹要么本来已在那里而且留下（概率 $\frac{1}{2}$），要么在相邻的小孩手上并被传向正确方向（每个相邻小孩各贡献概率 $\frac{1}{4}$）。所以

$$\begin{aligned}
A_2 &= \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{4}B_1 + \tfrac{1}{4}D_1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{3}{8},\\
B_2 &= \tfrac{1}{2}B_1 + \tfrac{1}{4}A_1 + \tfrac{1}{4}C_1 = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + 0 = \tfrac{1}{4},\\
C_2 &= \tfrac{1}{2}C_1 + \tfrac{1}{4}B_1 + \tfrac{1}{4}D_1 = 0 + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{8},\\
D_2 &= \tfrac{1}{2}D_1 + \tfrac{1}{4}C_1 + \tfrac{1}{4}A_1 = \tfrac{1}{8} + 0 + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

验算一下，$\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 1$。

第 (ii) 部分

用于 $n = 2$ 的论证对每个 $n \geq 0$ 都成立，依据是全概率定律（law of total probability）（以第 n 次吹哨后谁持有包裹作为条件）：

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= \tfrac{1}{2}A_n + \tfrac{1}{4}(B_n + D_n), & B_{n+1} &= \tfrac{1}{2}B_n + \tfrac{1}{4}(A_n + C_n),\\
C_{n+1} &= \tfrac{1}{2}C_n + \tfrac{1}{4}(B_n + D_n), & D_{n+1} &= \tfrac{1}{2}D_n + \tfrac{1}{4}(A_n + C_n),
\end{aligned}$$

其中 $A_0 = 1$ 及 $B_0 = C_0 = D_0 = 0$。

求 B_n 和 D_n。 把 B_{n+1} 与 D_{n+1} 的方程相加，

$$B_{n+1} + D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(B_n + D_n) + \tfrac{1}{2}(A_n + C_n) = \tfrac{1}{2}(A_n + B_n + C_n + D_n) = \tfrac{1}{2},$$

因为包裹总在某人手上，所以四个概率之和为 1。

? **想一想** 现在已知 $B + D$ 之和，但要怎样把它分配给 B 和 D?

改为相减而非相加：$A_n + C_n$ 项互相抵消，剩下

$$B_{n+1} - D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(B_n - D_n).$$

由于 $B_0 - D_0 = 0$，可得对每个 n 都有 $B_n - D_n = 0$。（这正是游戏的镜像对称：顺时针与逆时针传递的可能性相同，而 B 和 D 对称地位于 A 的两侧。）结合 $B_n + D_n = \frac{1}{2}$，

$$B_n = D_n = \tfrac{1}{4} \qquad \text{对所有} n \geq 1,$$

当然 $B_0 = D_0 = 0$。这与第 (i) 部分吻合。

求 A_n 和 C_n。 对 $n \geq 1$，我们现已知道 $A_n + C_n = 1 - (B_n + D_n) = \frac{1}{2}$。把 A_{n+1} 与 C_{n+1} 的方程相减，$B_n + D_n$ 项互相抵消：

$$A_{n+1} - C_{n+1} = \tfrac{1}{2}(A_n - C_n),$$

而此式对所有 $n \geq 0$ 成立。由于 $A_0 - C_0 = 1$，得对所有 $n \geq 0$ 有 $A_n - C_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$。与 $A_n + C_n = \frac{1}{2}$ 联立求解：

$$\boxed{A_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}, \qquad C_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} \qquad (n \geq 1).}$$

这些公式在 $n = 0$ 时不成立（会得出 $A_0 = \frac{3}{4}$），因为关系式 $A_n + C_n = \frac{1}{2}$ 要在第一次吹哨之后才开始成立。

验算

- $n = 1$：$A_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 及 $C_1 = 0$；$n = 2$：$A_2 = \frac{3}{8}$ 及 $C_2 = \frac{1}{8}$。两者都与第 (i) 部分吻合。
- $n = 3$：公式给出 $(A_3, B_3, C_3, D_3) = (\frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4})$，其和为 1，并与直接按递推关系逐步计算的结果一致；以电脑模拟 200 000 局游戏，得出 $A_3 \approx 0.313$ 及 $C_3 \approx 0.188$。
- 当 $n \to \infty$ 时，每个概率都趋向 $\frac{1}{4}$：吹哨多次之后，包裹在任何位置的可能性都相同，正如对称性所暗示。

常见错误

- 用从 B 传出的概率来写 B_{n+1}，而不是用传入 B 的概率。应该问：“包裹在上一刻可能在哪里?”
- 声称 $A_n = \frac{1}{4} + 2^{-(n+1)}$ 对所有 $n \geq 0$ 成立；它在 $n = 0$ 时是错的。
- “凭对称性”假设 $B_n = D_n$ 而不给出任何理由；差的递推关系能令这一点变得严谨。

STEP 之外

这是一条马可夫链(Markov chain)：一个在四个状态组成的环上进行的随机游走(random walk)，转移矩阵（transition matrix）为 P，而 $(A_n, B_n, C_n, D_n) = (1, 0, 0, 0)P^n$。组合 $B_n - D_n$、$A_n - C_n$ 及 $A_n + C_n - B_n - D_n$ 来自 P 的特征向量（eigenvectors）（对应的特征值（eigenvalues）为 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$ 及 0），而以 2^{-n} 的速率收敛（convergence）至均匀分布（uniform distribution），是由第二大的特征值所决定的。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）对马可夫链及其长期行为有浅白易明的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。