详细解答

STEP II 2018，第 11 题

力学 · 摩擦力与力矩

STEP II 2018，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s2-q11

关键思路

三条方程正好确定三个未知的接触力：水平方向的牛顿（Newton）第二定律（Newton's second law）、竖直方向没有加速度（acceleration），以及题目给定的条件——对质心（centre of mass）的力矩（moment）互相平衡。只要把两个法向反作用力（normal reaction）都用加速度 a 表示，两种失效情况便各自变成 a 的一个临界值。前轮在其反作用力降至零时离地；后轮在所需的摩擦力（friction）超过其反作用力的 μ 倍时打滑。哪个临界值较低，哪种情况便先发生。

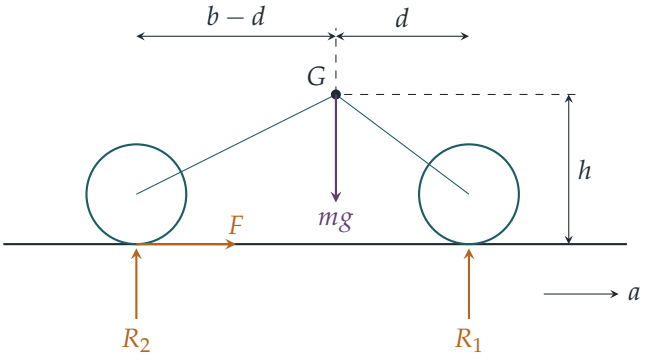
解答

模型与受力

把电单车视为沿直线运动的刚体（rigid body），向右的加速度为 $a \geq 0$。路面水平，所以质心 G 没有竖直方向的加速度，而车身亦不转动。所受的力为：

- 重力 mg，于 G 处向下作用；
- 前轮的法向反作用力 R_1（前轮光滑，所以该处没有摩擦力）；
- 后轮的法向反作用力 R_2 及摩擦力 F。引擎驱动后轮，所以 F 向前作用，而且是唯一的水平力。

前轮接触点在 G 前方水平距离 d 处，后轮接触点则在 G 后方 $b - d$ 处。两者都在 G 下方距离 h 处。



以 a 表示反作用力

水平及竖直方向分别有

$$F = ma, \qquad R_1 + R_2 = mg.$$

现在对 G 取力矩，以逆时针为正（即会令前轮擡起的方向）。重力对 G 没有力矩。R_1 在 G 前方距离 d 处向上作用，产生逆时针力矩 $R_1 d$。R_2 在 G 后方距离 $b-d$ 处向上作用，产生顺时针力矩 $R_2(b-d)$。而 F 沿 G 下方距离 h 的直线向前作用，所以产生逆时针力矩 Fh。令总力矩为零：

$$R_1 d + Fh = R_2(b-d).$$

代入 $F = ma$ 及 $R_1 = mg - R_2$：

$$mgd - R_2 d + mah = R_2(b-d) \quad \Longrightarrow \quad R_2 = \frac{m(gd+ah)}{b},$$

于是

$$R_1 = mg - R_2 = \frac{m\big((b-d)g - ah\big)}{b}.$$

随着 a 增大，重量由前轮转移到后轮：R_1 减小，R_2 增大。

两种失效各在何时发生？

前轮。只要 $R_1 \geq 0$，前轮便保持贴地，即

$$a \leq \frac{(b-d)g}{h} =: a_{\text{离地}}.$$

后轮。只要 $F \leq \mu R_2$，后轮便不会打滑，即

$$ma \leq \frac{\mu m(gd+ah)}{b} \iff a(b-\mu h) \leq \mu dg.$$

? **想一想** 为甚么我们可以除以 $b-\mu h$ 而不必把不等式（inequality）反向？

这正是给定条件 $\mu < b/h$ 的用途：它表示 $b - \mu h > 0$。因此后轮在以下情况下保持抓地：

$$a \le \frac{\mu d g}{b - \mu h} =: a_{\text{打滑}}.$$

（若没有这个条件，可提供的摩擦力的增长速度至少与所需摩擦力一样快，后轮便永远不会打滑。）

两个临界值都是正数，而当 a 由零开始增大时，后轮先打滑当且仅当 $a_{\text{打滑}} < a_{\text{离地}}$。由于 $b - \mu h > 0$ 且 $h > 0$，我们可以交叉相乘：

$$\begin{aligned}
\frac{\mu d g}{b - \mu h} < \frac{(b-d)g}{h} &\iff \mu d h < (b-d)(b - \mu h) \\
&\iff \mu d h + \mu h(b-d) < b(b-d) \\
&\iff \mu h b < b(b-d) \\
&\iff \mu < \frac{b-d}{h},
\end{aligned}$$

最后一步除以 $bh > 0$。所以若 $(*)$ 成立，后轮会在前轮离地之前打滑，此即所求。（事实上，这串推导显示两个命题是等价的。）

$(*)$ 成立时的最大加速度

若 $(*)$ 成立，则 $a_{\text{打滑}} < a_{\text{离地}}$。任何不超过 $a_{\text{打滑}}$ 的加速度都同时满足两个条件，所以前轮贴地而后轮抓地。任何更大的加速度都需要 $F > \mu R_2$。因此不打滑时的最大加速度为

$$a_{\max} = \frac{\mu d g}{b - \mu h},$$

此即所求。

$(*)$ 不成立时

此时 $\mu \ge \dfrac{b-d}{h}$，所以同一串等价推导（把 $<$ 换成 $\ge$）给出 $a_{\text{离地}} \le a_{\text{打滑}}$。因此每个不超过 $a_{\text{离地}}$ 的加速度都令 $R_1 \ge 0$，同时亦满足 $a \le a_{\text{打滑}}$，所以后轮不会打滑。超过 $a_{\text{离地}}$ 便需要 $R_1 < 0$，而只要前轮接触路面，这是不可能的。所以前轮保持接触时的最大加速度为

$$a_{\max} = \frac{(b-d)g}{h}.$$

在这个加速度下 $R_1 = 0$：电单车正处于翘头（wheelie）的临界状态，全部重量都落在后轮上。

验算

- 当 $a = 0$：$R_2 = mgd/b$ 及 $R_1 = mg(b-d)/b$，正是按杠杆原理（lever rule）得出的一般静态分配。较接近 G 的车轮承受较多重量。
- 在边界情况 $\mu = (b-d)/h$ 下，有 $b - \mu h = d$，所以 $a_{\text{打滑}} = \mu g = (b-d)g/h = a_{\text{离地}}$。两个答案一致，理应如此。
- 数值例子：$b = 1.5\,\text{m}$，$d = 0.75\,\text{m}$，$h = 0.6\,\text{m}$，$\mu = 0.8$，$g = 9.8\,\text{m s}^{-2}$。此时 $(b-d)/h = 1.25 > \mu$，而 $a_{\text{打滑}} = 5.88/1.02 \approx 5.76\,\text{m s}^{-2}$，远低于 $a_{\text{离地}} = 12.25\,\text{m s}^{-2}$。用电脑对大量随机设置的电单车进行检验，逐步增大 a 并记录哪个条件先失效，结果与两条公式都吻合。

常见错误

- 把摩擦力力矩的正负号弄错。在 G 下方向前的摩擦力倾向令前轮撬起，这正是加速会令前轮减载的原因。
- 除以 $b - \mu h$ 却没有说明它为何是正数。这正是条件 $\mu < b/h$ 唯一的作用。
- 对接触点取力矩并令总力矩为零。电单车正在加速，所以力矩只在对 G 时平衡，对其他点则不然。

STEP 之外

题目给定的力矩条件，是刚体定律的一个特例：对质心的角动量（angular momentum）变化率等于对质心的总转矩（torque）。这里角动量为零，因为电单车不转动。若对任何其他点取力矩，加速中的物体会由 ma 额外产生一个“虚拟”（fictitious）转矩，这便解释了最后一个常见错误。同样的重量转移分析，也是车辆动力学（vehicle dynamics）中刹车与牵引极限的基础。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对刚体动力学有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。