详细解答

STEP II 2018，第 10 题

力学 • 伸长绳上的运动学

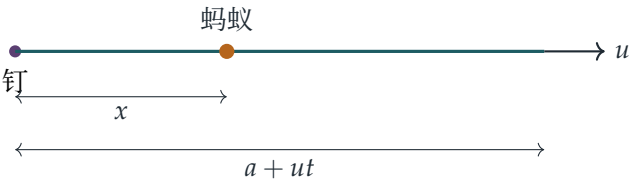
> **STEP II 2018，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q10

本题在 *Beyond STEP* 第 11.12 节橡皮绳上的蚂蚁中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/rubber-rope.html

关键思路

由于绳子是均匀（uniform）的，它在每一处都以相同的倍数拉长，所以绳上每一点沿绳的比例位置保持不变。因此，绳上一点的速率与它跟钉的距离成正比。这样，蚂蚁的方程便是线性（linear）的，而最自然要追踪的量是蚂蚁沿绳所处的比例位置 $x/(a+ut)$，而不是 x 本身。

解答



绳上一点的速率

在时间 t，自由端与钉的距离为 $a+ut$，这也就是绳子的长度。绳子是均匀的，所以整条绳都以相同的倍数 $(a+ut)/a$ 被拉长。因此，在 $t=0$ 时与钉相距 x_0 的绳上一点，始终位于沿绳相同的比例位置 x_0/a：

$$x = \frac{x_0}{a}(a+ut).$$

固定 x_0 求导，得其速率为 $\dfrac{x_0 u}{a}$；以该点目前的位置 x 表示，

$$\text{点的速率，其中该点与钉相距} x = \frac{ux}{a+ut}.$$

作为验证，此速率在钉处为 0，在自由端为 u。

蚂蚁的方程

蚂蚁相对于钉的速率，等于 v 加上牠脚下绳子的速率，所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{ux}{a+ut}.$$

利用商法则（quotient rule），再代入这条方程，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) &= \frac{1}{a+ut}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{ux}{(a+ut)^2} \\ &= \frac{1}{a+ut}\left(v + \frac{ux}{a+ut}\right) - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{v}{a+ut},\end{aligned}$$

此即所求。

到达末端所需的时间

由 0 积分至 t，并利用 $t = 0$ 时 $x = 0$：

$$\frac{x}{a+ut} = \int_0^t \frac{v}{a+us}\,\mathrm{d}s = \frac{v}{u}\ln\left(\frac{a+ut}{a}\right) = \frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{ut}{a}\right).$$

左边是蚂蚁已走过的绳长比例，当它等于 1 时，蚂蚁便到达末端。右边由 0 开始持续递增且无上界，所以这情况恰好发生一次，发生于时间 T，其中

$$\ln\left(1+\frac{uT}{a}\right) = k \iff 1+\frac{uT}{a} = \mathrm{e}^k \iff uT = a(\mathrm{e}^k - 1),$$

这正是题目给出的结果。

回程

现在蚂蚁朝钉的方向走，所以牠自身沿绳的速度为 $-v$，于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v + \frac{ux}{a+ut}.$$

? **想一想** 我们需要重做一次商法则的计算吗?

不需要：上面的推导除了 v 的正负号外完全不变，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = -\frac{v}{a+ut}.$$

回程始于 $t = T$，此时蚂蚁在绳的末端，即 $x/(a+ut) = 1$。由 T 积分至 t，

$$\frac{x}{a+ut} = 1 - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{a+ut}{a+uT}\right).$$

当这个比例为 0 时，蚂蚁便到达钉处；这首先发生于时间 t_1，其中

$$\ln\left(\frac{a+ut_1}{a+uT}\right) = k \iff a+ut_1 = (a+uT)\,\mathrm{e}^k.$$

所以回程需时

$$t_1 - T = \frac{(a+uT)(\mathrm{e}^k-1)}{u}.$$

由去程可知 $\mathrm{e}^k - 1 = uT/a$ 及 $a+uT = a\mathrm{e}^k$，所以

$$t_1 - T = \frac{a\mathrm{e}^k}{u}\cdot\frac{uT}{a} = T\mathrm{e}^k.$$

回程需时 $T\mathrm{e}^k$，比去程长 e^k 倍。

验算

- 若 $u \to 0$,绳子不会拉长:$k \to 0$,而 $T = a(\mathrm{e}^k-1)/u \to a/v$,同时回程时间 $T\mathrm{e}^k \to a/v$ 亦然，正合预期。
- 回程时间较长，这是合理的：回程时，蚂蚁脚下的绳子会把牠带离钉。
- 对随机选取的 a、u 和 v 值（例如 $a = 1$、$u = v$，因此 $k = 1$ 及 $T = \mathrm{e} - 1 \approx 1.718$），以数值方法逐步推进两条微分方程（differential equation），结果显示蚂蚁在时间 T 到达末端，再经过 $T\mathrm{e} \approx 4.67$ 后回到钉处，与公式吻合。

常见错误

- 以为绳上每一点都以速率 u 移动；其实只有自由端是这样。
- 忘记回程始于 $t = T$ 而非 $t = 0$，因此积分常数（constant of integration）会改变。
- 题目要求只以 T 和 k 表示答案，却把答案停留在 $(a+uT)(\mathrm{e}^k-1)/u$。

STEP 之外

无论绳子拉长得多快，蚂蚁总会到达末端，因为 $\int \mathrm{d}t/(a+ut)$ 发散（diverges）。蚂蚁已走过的距离占绳长的比例，随时间的对数（logarithm）增长；倘若拉长得更快（例如以指数方式），该积分便会收敛（converge），蚂蚁就可能永远到不了。同样的概念——在一个本身正在膨胀的空间中以固定速率前进——也出现在宇宙学（cosmology）中，它决定了遥远星系发出的光能否到达我们。这里通过找出合适的量来解线性方程，其实是积分因子法（integrating-factor method）的一个例子；参见 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。