详细解答

# STEP II 2018，第 1 题

纯数学 · 多项式的根

> **STEP II 2018，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q1

## 关键思路

系数由前往后读和由后往前读都一样，所以把方程除以 $x^2$，就可以把这个四次方程（quartic）化为关于 $t = x + \frac{1}{x}$ 的二次方程（quadratic）。每一个 $t$ 值都对应四次方程的一对根 $k$、$\frac{1}{k}$，而实数 $x$ 只能给出 $|t| \geq 2$，且 $t = \pm 2$ 当且仅当 $x = \pm 1$。于是，数相异根的个数，就归结为：哪些 $t$ 值会出现，以及其中是否有一个等于 $\pm 2$。

## 解答

### 根成倒数（reciprocal）对出现

设 $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$。由于 $P(0) = 1 \neq 0$，任何根 $k$ 都不为零，而且

$$k^4 P\left(\frac{1}{k}\right) = 1 + ak + bk^2 + ak^3 + k^4 = P(k) = 0.$$

因为 $k^4 \neq 0$，得 $P(\frac{1}{k}) = 0$，所以 $k^{-1}$ 也是根。

### 代换（substitution）$t = x + \frac{1}{x}$

把 $P(x) = 0$ 除以 $x^2$（因 $x \neq 0$，这是可以的），并利用 $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$：

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \iff t^2 + at + (b - 2) = 0.$$

设 $t_1$、$t_2$ 为这个二次方程的根，则 $t_1 + t_2 = -a$，$t_1 t_2 = b - 2$。展开可知

$$P(x) = (x^2 - t_1 x + 1)(x^2 - t_2 x + 1),$$

因为右方等于 $x^4 - (t_1 + t_2)x^3 + (2 + t_1 t_2)x^2 - (t_1 + t_2)x + 1$。所以 $P$ 的根就是 $x^2 - t_1 x + 1$ 的根连同 $x^2 - t_2 x + 1$ 的根。

现在运用“所有根都是实数”这个假设。每个因式 $x^2 - t_i x + 1$ 都有两个实根 $k$ 和 $\frac{1}{k}$（它们的积是 1），而 $t_i = k + \frac{1}{k}$ 是实数。对于实数 $k \neq 0$，$k + \frac{1}{k}$ 与 $k$ 同号，而且

$$\left|k + \tfrac{1}{k}\right| - 2 = \frac{(|k| - 1)^2}{|k|} \geq 0,$$

等号只在 $k = \pm 1$ 时成立。因此：

- 若 $|t_i| > 2$，因式 $x^2 - t_i x + 1$ 有两个相异实根，两者都不等于 $\pm 1$；
- 若 $t_i = 2$，该因式为 $(x-1)^2$；若 $t_i = -2$，则为 $(x+1)^2$。

此外，不同的 $t$ 值不可能有公共根 $x$，因为 $x$ 决定了 $t = x + \frac{1}{x}$。

### 第 (i) 部分

若只有一个相异根 $k$，则 $\frac{1}{k} = k$，所以 $k = \pm 1$，且 $P(x) = (x \mp 1)^4$。展开得

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1, \qquad (x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,$$

两者都具有所需的形式。所以所求的值为 $a = -4$, $b = 6$ 及 $a = 4$, $b = 6$。

### 第 (ii) 部分

逐一考虑 $t_1$、$t_2$ 的各种可能（两者都是实数，且 $|t_i| \geq 2$）：

- $t_1 \neq t_2$，且两者都有 $|t_i| > 2$：四个相异根。
- $t_1 = t_2$：四次式是完全平方（perfect square）$(x^2 - t_1 x + 1)^2$，所以若 $|t_1| > 2$，有两个相异根；若 $t_1 = \pm 2$，则只有一个。
- $\{t_1, t_2\} = \{2, -2\}$：$P(x) = (x-1)^2(x+1)^2$，两个相异根。
- 其中一个 $t_i$ 为 $\pm 2$，另一个的绝对值大于 2：根为 $\pm 1$（二重）及另外两个根，即三个相异根。

**想一想** 为甚么其中一个 $t$ 值必定是 $\pm 2$?

四个根中只有三个相异，表示有某个根是重根（repeated root）；上面的列表显示，在出现三个相异根的情况下，这只会在最后一种情况发生。说得更直接一点：根分成一对对互为倒数的根，而相异根的个数是奇数，就迫使某个根等于自己的倒数，即 $\pm 1$。

所以 $t = 2$ 或 $t = -2$ 是 $t^2 + at + b - 2 = 0$ 的根：

$$\begin{aligned} t = 2: &\quad 4 + 2a + b - 2 = 0 \iff b = -2a - 2, \\ t = -2: &\quad 4 - 2a + b - 2 = 0 \iff b = 2a - 2. \end{aligned}$$

因此 $b = 2a - 2$ 或 $b = -2a - 2$，得证。

### 第 (iii) 部分

当 $b = 2a - 2$ 时，关于 $t$ 的二次方程为

$$t^2 + at + 2a - 4 = (t + 2)(t + a - 2),$$

所以 $t_1 = -2$，$t_2 = 2 - a$。前者给出 $(x + 1)^2$，后者给出 $x^2 - (2 - a)x + 1 = 0$，所以

$$x = -1\text{（二重）}, \qquad x = \frac{2 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}.$$

由于题目告诉我们所有根都是实数，这些根都是实数；这相当于 $a^2 - 4a = a(a - 4) \geq 0$，即 $a \leq 0$ 或 $a \geq 4$。

### 最后部分

由 (ii)，要有三个相异根，就需要 $b = 2a - 2$ 或 $b = -2a - 2$。反过来，假设 $b = 2a - 2$（且所有根都是实数）。由 (iii)，$t$ 的值为 $-2$ 及 $2 - a$；根据上面的情况列表，除非 $2 - a = \pm 2$，否则恰好有三个相异根：

- $a = 0$，$b = -2$：$t = \pm 2$，$P(x) = (x^2 - 1)^2$，只有两个相异根；
- $a = 4$，$b = 6$：$t = -2$ 出现两次，$P(x) = (x + 1)^4$，只有一个根。

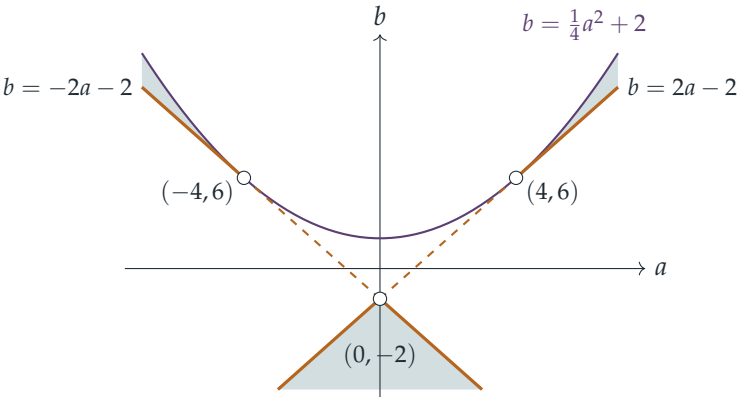
把 $x$ 换成 $-x$，$P$ 会变成同样形式、但 $a$ 换成 $-a$ 的多项式，这会把两条直线互换。所以当 $b = -2a - 2$ 时，$t$ 的值为 2 及 $-a - 2$，例外情况为 $a = 0$，$b = -2$ 及 $a = -4$，$b = 6$。

因此，对于使所有根都是实数的实数 $a$、$b$，$(*)$ 恰好有三个相异根当且仅当

$$b = 2a - 2 \text{ 或 } b = -2a - 2, \qquad \text{且} (a, b) \neq (0, -2),\ (4, 6),\ (-4, 6).$$

注意 $(4, -10)$ 和 $(-4, -10)$ 是容许的：例如 $a = 4$，$b = -10$ 给出 $t = 2$ 及 $t = -6$，所以有三个相异根。

下图显示 $(a, b)$ 平面。阴影区域是所有根都是实数的地方：在两条直线之下（一个 $t$ 值最多为 $-2$，另一个至少为 2），或在 $|a| \geq 4$ 时位于直线与抛物线 $b = \frac{1}{4}a^2 + 2$ 之间（两个 $t$ 值在同一侧）。抛物线是 $t_1 = t_2$ 的地方，它与两条直线相切于 $(\pm 4, 6)$。答案就是两条直线在阴影区域边界上的实线部分，再除去三个空心圆点。




（直线的虚线部分，即 $0 < |a| < 4$，位于所有根都是实数的区域之外，这就是 (iii) 需要 $a \leq 0$ 或 $a \geq 4$ 的原因。）

## 验算

- 取 $a = -4$，$b = -10$（在 $b = 2a - 2$ 上，且容许）。由 (iii) 得 $x = -1, -1, 3 \pm 2\sqrt{2}$，而确实 $(x+1)^2(x^2 - 6x + 1) = x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 4x + 1$。根 $3 \pm 2\sqrt{2} \approx 5.828,\ 0.172$ 互为倒数，正如预期。
- 在被排除的点 $a = 0$，$b = -2$，四次式为 $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$，只有两个相异根。
- 我们用电脑对步长为 $\frac{1}{4}$、$|a| \leq 10$、$|b| \leq 15$ 的网格上每一点 $(a, b)$ 以数值方法求根；在 1579 个所有根都是实数的网格点中，恰好是上述条件所预测的 88 个点给出三个相异根。

## 常见错误

- 忘记例外的点：单凭 $b = 2a - 2$ 是必要但不充分的，因为 $(0, -2)$ 和 $(4, 6)$ 都在这条直线上。
- 假设重根必定是 $\pm 1$：二重的一对根 $k, k, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}$ 也是可能的，但这只给出两个相异根，而不是三个。

## STEP 之外

系数正读反读都一样的多项式称为*回文多项式*（palindromic，又称倒数多项式，reciprocal），而 $t = x + \frac{1}{x}$ 这个技巧可以把任何偶数次的回文多项式的次数减半。同样的代换配合 $x = e^{i\theta}$，会得到 $t = 2\cos\theta$；正是用这个方法可以求出 $2\cos(2\pi/n)$ 的极小多项

式（minimal polynomial），高斯（Gauss）处理正 17 边形时也是用这个方法。描述多项式的根在何处重合（正如上图 $(a, b)$ 平面中的曲线所做的）这个想法，引出了判别式（discriminant）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）是进一步阅读多项式及其根的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。