详细解答

STEP I 2018，第 9 题

力学 · 斜面上的运动

STEP I 2018，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

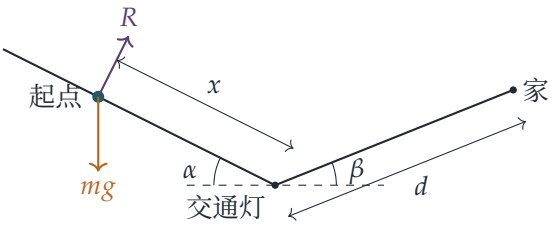
step.maths.org/questions/18-s1-q9

关键思路

由于没有阻力，小型赛车（go-kart）在每段直路上的加速度都是常数：沿第一段斜坡向下的加速度为 $g\sin\alpha$，沿第二段斜坡向上则有大小为 $g\sin\beta$ 的减速度。因此每一段都是一个等加速度（constant acceleration）问题，而两段之间由到达交通灯时的速率连接起来。能量（或 $v^2 = u^2 + 2as$）决定我到底能否到家；时间则由每一段上的 $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ 得出，其余就是以 k 表示的细心代数运算。

解答

把小型赛车连同驾驶者模拟为一个质点（particle），沿每条最大斜率直线（line of greatest slope）运动，没有摩擦力，也没有空气阻力。所受的力只有重量 mg 和法向反作用力（normal reaction）R，而后者不做功。



到达家门

沿第一段斜坡分解力，重量沿斜坡向下的分量为 $mg\sin\alpha$，所以加速度为 $g\sin\alpha$。由静止出发并走过距离 x 后，到达交通灯时的速率 V 满足

$$V^2 = 2gx\sin\alpha.$$

由于速率没有突变，我以速率 V 开始驶上第二段，此时重量沿斜坡产生大小为 $g\sin\beta$ 的减速度。在交通灯以外距离 s 处，我的速率 v 满足 $v^2 = V^2 - 2gs\sin\beta$。要到达家门，v^2 必须一直保持非负，直至 $s = d$，即

$$2gx\sin\alpha - 2gd\sin\beta \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad x\sin\alpha \geq d\sin\beta,$$

这正是所求。（等价地说：根据能量守恒（conservation of energy），我永远不能升到高于起点的高度，而起点比交通灯高 $x\sin\alpha$，家则比交通灯高 $d\sin\beta$。）

总时间

为使代数简洁，设 $c = \left(\frac{1}{2}g\sin\alpha\right)^{1/2}$，则 $g\sin\alpha = 2c^2$；又因 $\sin\beta = \sin\alpha/k$，故 $g\sin\beta = 2c^2/k$。

第一段。由 $x = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t_1^2 = c^2t_1^2$ 可知到达交通灯的时间为 $t_1 = \sqrt{x}/c$，而该处的速率为 $V = (g\sin\alpha)t_1 = 2c\sqrt{x}$。

第二段。从交通灯起量度 s，有 $s = Vt - \frac{1}{2}(g\sin\beta)t^2$，所以到达 $s = d$ 的时间 t_2 满足

$$\frac{c^2}{k}\,t_2^2 - 2c\sqrt{x}\,t_2 + d = 0.$$

想一想 这个二次方程有两个根。哪一个才是我到达的时间?

较大的根是：假如斜坡无限长，质点停下后沿斜坡滑回，再次经过 $s = d$ 的时间。我是在第一次到达 $s = d$ 时到家，所以我们要取较小的根：

$$t_2 = \frac{2c\sqrt{x} - \sqrt{4c^2x - 4c^2d/k}}{2c^2/k} = \frac{k}{c}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x - \tfrac{d}{k}}\right) = \frac{1}{c}\left(k\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}\right),$$

这里因 $k > 0$ 而用了 $k\sqrt{x - d/k} = \sqrt{k^2x - kd}$。平方根之所以是实数，正是因为 $x \geq d/k$，也就是第一部分的条件 $x\sin\alpha \geq d\sin\beta$。

相加得 $T = t_1 + t_2$，于是

$$\left(\frac{g\sin\alpha}{2}\right)^{1/2} T = cT = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd},$$

这就是所求的结果。

使 T 最小

由于 c 是正常数，我们在 $x \geq d/k$ 上求 $f(x) = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}$ 的最小值。求导（differentiating）得

$$f'(x) = \frac{1+k}{2\sqrt{x}} - \frac{k^2}{2\sqrt{k^2x - kd}}.$$

令 $f'(x) = 0$，得 $(1+k)\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}$。两边皆为正，所以平方不会失去任何信息：

$$\begin{aligned}(1+k)^2(k^2x - kd) &= k^4x \\ x\left[(1+k)^2k^2 - k^4\right] &= (1+k)^2kd \\ xk^2(1+2k) &= (1+k)^2kd,\end{aligned}$$

这里用了 $(1+k)^2 - k^2 = 1 + 2k$。除以 $k^2(1+2k) > 0$，得

$$x = \frac{(1+k)^2}{k(1+2k)}\,d.$$

这是一个容许的起点：$(1+k)^2 = 1 + 2k + k^2 > 1 + 2k$，所以这个 x 严格大于 d/k，我确实能到家。

存在最佳的 x 是合理的：起点太近，我在山坡最后一段就会慢得像爬行；起点太远，我又要在第一段斜坡上花很长时间。

验算

- 在最佳点，$\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}/(1+k)$，所以 $cT = \sqrt{x}\,\dfrac{1+2k}{1+k} = \sqrt{\dfrac{(1+2k)d}{k}}$，最短时间的形式简洁得令人愉快。
- 取 $\alpha = \beta$，即 $k = 1$。此时最佳点为 $x = \frac{4}{3}d$，公式给出 $cT = 2\sqrt{4d/3} - \sqrt{d/3} = \sqrt{3d}$，与上一项验算吻合。
- 在临界值 $x = d/k$ 时，我只是刚好慢慢挪到门口，且 $f'(x) \to -\infty$，所以把起点稍为后移必定能节省时间。
- 以细小的时间间隔逐步数值推进运动，并对多组随机角度和距离进行测试，结果与 T 的公式在五位有效数字内一致；以电脑搜索 x，找到的最小值亦正是上面所得的值。

常见错误

- 为 t_2 取了二次方程的较大根：那是滑回下坡时经过家门的时间。
- 忘记交通灯处的速率并非已知，必须由第一段延续过来。

► 遗漏条件 $x \geq d/k$，而正是这个条件使 $\sqrt{k^2x - kd}$ 为实数。

STEP 之外

最短时间的简洁答案暗示了一个更广阔的主题：选择路径或起点以使行程时间最短，正是*变分法*（calculus of variations）的研究对象；其最著名的问题——最速降线（brachistochrone）问题——就是要找出在重力作用下下降最快的曲线。在大学一年级的力学课程中，你亦会接触到这个想法：对于保守力（conservative forces），单靠能量就能告诉你质点可以到达哪里，而要求时间则必须对运动方程（equation of motion）积分。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对这两个想法都有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。