详细解答

STEP I 2018，第 8 题

纯数学 · 耦合微分方程

> **STEP I 2018，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q8

关键思路

两条导数（derivative）规则是刻意设计成互相抵消的：每当出现 s'，就会带来 c^2；每当出现 c'，就会带来 $-\mathrm{s}^2$。因此，贯穿全题最自然的做法，是对乘积和商求导，观察各项如何合并，然后利用 (i) 的恒等式（identity）把所有东西化成单一个函数。至于积分（integral），要把每个被积函数看成“某东西乘以 s^2”或“某东西乘以 c^2”，因为这些正正是我们已知的导数。最后两部分中关于 u 的积分，其实是同样的积分换了个样子。

解答

全题中，在不会引起混淆时，以 s 和 c 分别表示 $\mathrm{s}(x)$ 和 $\mathrm{c}(x)$。

第 (i) 部分

由连锁法则（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3\right)=3\mathrm{s}^2\,\mathrm{s}'+3\mathrm{c}^2\,\mathrm{c}'=3\mathrm{s}^2\mathrm{c}^2-3\mathrm{c}^2\mathrm{s}^2=0,$$

所以 $\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3$ 是常数。它在 $x=0$ 的值是 $0^3+1^3=1$，因此

$$\mathrm{s}(x)^3+\mathrm{c}(x)^3=1 \quad \text{对所有} x,$$

即为所求。这个恒等式是全题其余部分的引擎：它让我们可以把 s^3 换成 $1-\mathrm{c}^3$，反之亦然。

第 (ii) 部分

由乘积法则（product rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc}) = \mathrm{s}'\mathrm{c} + \mathrm{sc}' = \mathrm{c}^2 \cdot \mathrm{c} + \mathrm{s} \cdot (-\mathrm{s}^2) = \mathrm{c}^3 - \mathrm{s}^3.$$

利用 (i)，$\mathrm{s}^3 = 1 - \mathrm{c}^3$，所以上式等于 $\mathrm{c}^3 - (1 - \mathrm{c}^3) = 2\mathrm{c}^3 - 1$，正是我们想要的结果。

至于商（在 $\mathrm{c}(x) \neq 0$ 之处），商法则（quotient rule）给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}}\right) = \frac{\mathrm{s}'\mathrm{c} - \mathrm{sc}'}{\mathrm{c}^2} = \frac{\mathrm{c}^3 + \mathrm{s}^3}{\mathrm{c}^2} = \frac{1}{\mathrm{c}(x)^2},$$

同样是用了 (i)。留意这与 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$ 之间令人愉快的对应。

第 (iii) 部分

由于 $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$，第一个积分可以立即写出：

$$\int \mathrm{s}(x)^2 \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + C.$$

? **想一想** 怎样改写 s^5，才能令已知的导数 $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$ 出现?

分出一个因子 s^2，再对余下部分使用 (i)：$\mathrm{s}^5 = \mathrm{s}^3 \cdot \mathrm{s}^2 = (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{s}^2 = -(1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}'$。这是 $g(\mathrm{c})\,\mathrm{c}'$ 的形式，可用逆连锁法则（reverse chain rule）积分：

$$\int \mathrm{s}(x)^5 \,\mathrm{d}x = -\int (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}' \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + \tfrac{1}{4}\mathrm{c}(x)^4 + C.$$

（求导回去验证：$-\mathrm{c}' + \mathrm{c}^3\mathrm{c}' = -\mathrm{c}'(1 - \mathrm{c}^3) = \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{s}^3$，结果理应如此。）

第 (iv) 部分

设 $u = \mathrm{s}(x)$，于是 $x = \mathrm{s}^{-1}(u)$，且 $\mathrm{d}u = \mathrm{s}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{c}(x)^2\,\mathrm{d}x$。由 (i)，$\mathrm{c}^3 = 1 - u^3$，所以 $\mathrm{c} = (1 - u^3)^{1/3}$（取实立方根，无论 c 的正负号如何都成立），因此

$$(1 - u^3)^{2/3} = \mathrm{c}(x)^2.$$

于是

$$\int \frac{1}{(1 - u^3)^{2/3}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + C = \mathrm{s}^{-1}(u) + C,$$

这正是我们要证明的。

第 (v) 部分

使用同一个代换（substitution），其中 $(1-u^3)^{1/3}=\mathrm{c}$，且 $\mathrm{d}u=\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$。

对于第一个积分，$(1-u^3)^{4/3}=\mathrm{c}^4$，所以由 (ii) 中关于商的结果，

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{(1-u^3)^{4/3}}=\int\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{c}^4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{c}^2}=\frac{\mathrm{s}(x)}{\mathrm{c}(x)}+C=\frac{u}{(1-u^3)^{1/3}}+C.$$

对于第二个积分，

$$\int(1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u=\int\mathrm{c}\cdot\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x.$$

(ii) 中关于乘积的结果说明 $\mathrm{c}^3=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc})\right)$，所以

$$\int\mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}(x+\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x))+C.$$

回到 u，其中 $x=\mathrm{s}^{-1}(u)$，且 $\mathrm{sc}=u(1-u^3)^{1/3}$：

$$\int(1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u=\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{s}^{-1}(u)+u(1-u^3)^{1/3}\right)+C.$$

验算

- (v) 的答案可以通过对 u 求导来验证。例如，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\frac{u}{(1-u^3)^{1/3}}=\frac{1}{(1-u^3)^{1/3}}+\frac{u^3}{(1-u^3)^{4/3}}=\frac{1}{(1-u^3)^{4/3}}.$$

- 以数值方法解微分方程（differential equation）至 $x=1.2$，得 $\mathrm{s}(1.2)\approx0.9411$ 及 $\mathrm{c}(1.2)\approx0.5500$，而确实 $0.9411^3+0.5500^3\approx1$。设 $U=\mathrm{s}(1.2)$，数值积分给出 $\int_0^U(1-u^3)^{-2/3}\,\mathrm{d}u\approx1.2000$，与 (iv) 的预测一致；又 $\int_0^U(1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u\approx0.8588=\frac{1}{2}(1.2+0.9411\times0.5500)$，与 (v) 吻合。
- 数值上，$\int_0^{1.2}\mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x\approx0.4500=1-\mathrm{c}(1.2)$，与 (iii) 一致。

常见错误

- 写成 $\int\mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x=+\mathrm{c}+C$：$\mathrm{c}'=-\mathrm{s}^2$ 中的负号很容易遗漏。
- 在 (iv) 和 (v) 中，忘记把 $\mathrm{d}u$ 转换成 $\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$，或者最终答案仍以 x 而非 u 表示。
- 在 (v) 中试图直接积分 c^3，而没有察觉 (ii) 早已把它表示为一个导数加一个常数。

STEP 之外

对曲线 $x^3+y^3=1$ 而言，s, c 这一对函数的角色，就如 sin 和 cos 之于圆 $x^2+y^2=1$；这类“广义三角函数”（generalised trigonometric functions）与椭圆函数（elliptic functions）是近亲，后者正是通过反演类似 (iv) 中的积分而产生的，就如 $\sin^{-1}u=\int(1-u^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u$ 一样。以带初始条件的微分方程来定义函数，再由此推导出它们的全部性质，是大学一年级的标准技巧；而题目中假设这些函数是“唯一确定”的，背后就是常微分方程（ODE）的存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem）。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《基础微分方程》）既涵盖相关理论，也有许多耦合方程组的例子。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。