详细解答

STEP I 2018，第 7 题

纯数学 · 解三次方程

> **STEP I 2018，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q7

关键思路

这个代换（substitution）是一个默比乌斯变换（Möbius transformation），经过精心选取，使得去分母之后 z^2 项和 z 项互相抵消，只剩下 z^3 和常数项。形如 $az^3+b=0$ 的三次方程（cubic equation）很容易解，所以整个任务就是把一般的既约三次方程（reduced cubic）$x^3-3cx+d=0$ 化成这个特殊形式。要做到这一点，就要由两个数的和与积求出这两个数，这归结为一个二次方程（quadratic equation）；而条件 $d^2>4c^3$ 正是来自这个二次方程有相异实根（distinct real roots）的条件。

解答

第 (i) 部分

设 $x=\dfrac{pz+q}{z+1}$，并把方程两边乘以 $(z+1)^3$：

$$(pz+q)^3-3pq(pz+q)(z+1)^2+pq(p+q)(z+1)^3=0.$$

我们需要用到 $(pz+q)(z+1)^2=pz^3+(2p+q)z^2+(p+2q)z+q$。现在按 z 的幂次合并同类项。

$$\begin{aligned}
z^3:&\quad p^3-3p^2q+p^2q+pq^2=p(p^2-2pq+q^2)=p(p-q)^2,\\
z^2:&\quad 3p^2q-3pq(2p+q)+3pq(p+q)=3p^2q-6p^2q-3pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^1:&\quad 3pq^2-3pq(p+2q)+3pq(p+q)=3pq^2-3p^2q-6pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^0:&\quad q^3-3pq^2+p^2q+pq^2=q(q^2-2pq+p^2)=q(p-q)^2.
\end{aligned}$$

因此方程化为 $az^3+b=0$，其中

$$a=p(p-q)^2, \qquad b=q(p-q)^2.$$

由于 $p\neq q$，我们可以除以 $(p-q)^2$，得到更简单的形式 $pz^3+q=0$。

对于每个 $x\neq p$，这个代换都可以反解为 $z=\dfrac{x-q}{p-x}$；而 $x=p$ 只有在 $p(p-q)^2=0$ 时才是该三次方程的根。此外，$z=-1$ 永远不是 $pz^3+q=0$ 的解，因为那需要 $p=q$。所以三次方程的根与 $pz^3+q=0$ 的根恰好一一对应（当 $p=0$ 时，三次方程就是 $x^3=0$）。

第 (ii) 部分

比较 $x^3-3cx+d$ 与 $x^3-3pqx+pq(p+q)$，我们需要

$$pq=c, \qquad pq(p+q)=d, \qquad \text{即} \qquad pq=c, \quad p+q=\frac{d}{c},$$

由于 $c\neq 0$，除以 c 是容许的。和为 $\frac{d}{c}$、积为 c 的两个数，就是

$$t^2-\frac{d}{c}t+c=0.$$

的两个根。这个二次方程有相异实根，当且仅当其判别式（discriminant）为正：

$$\frac{d^2}{c^2}-4c>0 \iff d^2>4c^3,$$

这里乘以了 $c^2>0$。所以当 $d^2>4c^3$ 时，取 p 和 q 为这个二次方程的两个根，就能把方程写成所需的形式，而且 p、q 是相异的实数。

第 (iii) 部分

这里 $c=-2$ 而 $d=-2$，所以 $d^2=4>-32=4c^3$，第 (ii) 部分适用。我们需要 $p+q=\frac{d}{c}=1$ 及 $pq=c=-2$，所以 p、q 是 $t^2-t-2=(t-2)(t+1)=0$ 的根。取 $p=2$、$q=-1$。由第 (i) 部分，方程变为

$$2z^3-1=0, \qquad z^3=\tfrac{1}{2},$$

它唯一的实根是 $z=2^{-1/3}$。记 $u=2^{1/3}$，则 $z=\frac{1}{u}$。于是

$$x=\frac{2z-1}{z+1}=\frac{2-u}{1+u}.$$

想一想 分母含有立方根，这个式子能否再化简？

可以。利用 $1+u^3=(1+u)(1-u+u^2)$ 进行有理化（rationalise），由于 $u^3=2$，这个式子等于 3：

$$x=\frac{(2-u)(1-u+u^2)}{3}=\frac{2-3u+3u^2-u^3}{3}=\frac{3u^2-3u}{3}=u^2-u.$$

所以实根是

$$x = 2^{2/3} - 2^{1/3} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}.$$

这是唯一的实根：$x^3 + 6x - 2$ 的导数（derivative）是 $3x^2 + 6 > 0$，所以它严格递增。z 的另外两个值是复数，给出两个复根。（若改为取 $p = -1$、$q = 2$，则得到 $z^3 = 2$，结果是同一个根。）

第 (iv) 部分

由于 $x = p$ 给出 $p^3 - 3p^3 + 2p^3 = 0$，所以 $x - p$ 是一个因式（factor），而

$$x^3 - 3p^2x + 2p^3 = (x-p)(x^2 + px - 2p^2) = (x-p)^2(x+2p).$$

所以根是 $x = p$（重根）和 $x = -2p$。

留意这正是第 (i) 部分中 $q = p$ 的形式，也恰好是第 (ii) 部分排除了的情况。现在设 $d^2 = 4c^3$，且 $c, d \neq 0$。那么 $c^3 = \frac{1}{4}d^2 > 0$，所以 $c > 0$。我们要找 p 使得 $p^2 = c$ 及 $2p^3 = d$。把第二式除以第一式，启发我们取

$$p = \frac{d}{2c},$$

而这确实可行：$p^2 = \dfrac{d^2}{4c^2} = \dfrac{4c^3}{4c^2} = c$，于是 $2p^3 = 2p \cdot p^2 = 2 \cdot \dfrac{d}{2c} \cdot c = d$。所以 $x^3 - 3cx + d = x^3 - 3p^2x + 2p^3$，其根为

$$x = \frac{d}{2c}\text{（二重）} \qquad \text{及} \qquad x = -\frac{d}{c}.$$

验算

- 第 (iii) 部分：$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \approx 0.32748$，而 $x^3 + 6x - 2$ 在这个值的取值准确到小数点后十五位都是 0。卡尔达诺公式（Cardano's formula）给出同一个根：$\sqrt[3]{1+3} + \sqrt[3]{1-3}$。
- 第 (iv) 部分：取 $c = 1$、$d = 2$，三次方程为 $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$，与二重根 $\frac{d}{2c} = 1$ 及单根 $-\frac{d}{c} = -2$ 吻合。
- 第 (i) 部分：取 $p = 1$、$q = 0$，三次方程为 $x^3 = 0$，代换给出 $x = \frac{z}{z+1}$，所以 $x^3(z+1)^3 = z^3$，与 $a = 1$、$b = 0$ 吻合。

常见错误

- 在第 (ii) 部分忘记 c 可能是负数：不等式乘以 c^2 是安全的，但乘以 c 就不是。
- 在第 (iii) 部分把 $\frac{1}{2}$ 的三个立方根全部当作实根。只有 $z = 2^{-1/3}$ 是实数。
- 在第 (iv) 部分取 $p = \sqrt{c}$。当 $d < 0$ 时符号就错了；$p = \frac{d}{2c}$ 则会自动给出正确的符号。

STEP 之外

这是推导三次方程卡尔达诺公式的一条巧妙途径。二次方程 $t^2 - \frac{d}{c}t + c = 0$ 扮演了“预解式”（resolvent）的角色，而 $d^2 - 4c^3$ 的符号（相差一个因子）就是三次方程的判别式，它决定方程有一个实根还是三个实根。为何三次和四次方程可以用根式求解，而一般的五次方程却不能，正是伽罗瓦理论（Galois theory）的主题。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）是开始阅读这方面内容的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。