详细解答

STEP I 2018，第 6 题

纯数学 · 中点法则与梯形法则

> **STEP I 2018，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q6

关键思路

两个近似值都是等距角的正弦之和，而题目给出的积化和差恒等式（product-to-sum identity）只要乘上一个选得恰当的 $2\sin\theta$，就能令这类和式裂项相消（telescope）。中点法则（midpoint rule）在 $\frac{\pi}{2n}$ 的奇数倍处取样，梯形法则（trapezium rule）则在偶数倍处取样，所以取 $\theta = \frac{\pi}{2n}$ 后，每一部分都变成裂项相消的和式。一旦求得 A_n 和 B_n 的闭式（closed form），第 (iii) 部分就只是半角公式（half-angle formulae）的运用。

解答

预备恒等式

在恒等式中取 $P = \theta$ 及 $Q = (2k-1)\theta$：

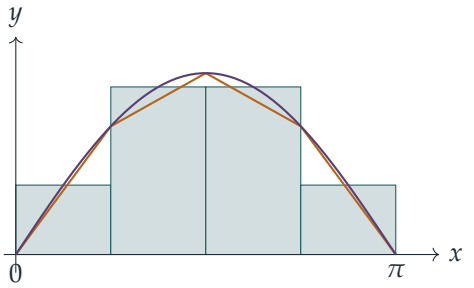
$$2\sin\theta\,\sin(2k-1)\theta = \cos(2k-2)\theta - \cos 2k\theta.$$

由 $k = 1$ 加到 $k = n$，每一项中减去的 $\cos 2k\theta$ 都在下一项中加回，因此和式裂项相消：

$$\begin{aligned} 2\sin\theta\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\theta &= (\cos 0 - \cos 2\theta) + (\cos 2\theta - \cos 4\theta) + \cdots \\ &\quad + (\cos(2n-2)\theta - \cos 2n\theta) \\ &= 1 - \cos 2n\theta, \end{aligned}$$

得证。

以下各部分中，记条宽为 $h = \frac{\pi}{n}$，并记 $\theta = \frac{\pi}{2n} = \frac{h}{2}$。



当 $n = 4$ 时：由于 $\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上是凹函数（concave），中点矩形（阴影部分）高估了面积，而梯形的弦（粗线）则低估了面积。

第 (i) 部分

第 k 条由 $(k-1)h$ 延伸至 kh，所以其中点位于 $x = (k - \frac{1}{2})h = (2k-1)\theta$，高度为 $\sin(2k-1)\theta$。因此

$$A_n = h \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\theta.$$

乘以 $2\sin\theta$ 并利用恒等式，再加上 $2n\theta = \pi$，得

$$2\sin\theta\, A_n = h\,(1 - \cos\pi) = 2h.$$

两边除以 2，得 $A_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}$，得证。

第 (ii) 部分

纵坐标（ordinates）位于 $x = kh = 2k\theta$，其中 $k = 0, 1, \ldots, n$，而两端的纵坐标为 $\sin 0 = \sin\pi = 0$。所以梯形法则给出

$$B_n = \frac{h}{2}\left(\sin 0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta + \sin\pi\right) = h \sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta.$$

现在这些是 θ 的偶数倍，所以我们再用一次恒等式，这次取 $P = \theta$、$Q = 2k\theta$：

$$2\sin\theta\, \sin 2k\theta = \cos(2k-1)\theta - \cos(2k+1)\theta.$$

由 $k = 1$ 加到 $n-1$，同样裂项相消：

$$2\sin\theta \sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta = \cos\theta - \cos(2n-1)\theta.$$

? **想一想** 怎样化简 $\cos(2n-1)\theta$?

由于 $2n\theta = \pi$, 我们有 $(2n-1)\theta = \pi - \theta$, 而 $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$。所以右方等于 $2\cos\theta$, 从而

$$2\sin\theta\, B_n = 2h\cos\theta, \qquad \text{即} \qquad B_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

(当 $n = 1$ 时和式为空, $B_1 = 0$; 由于 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, 公式依然成立。)

第 (iii) 部分

由于 $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$, $\sin\theta \neq 0$, 所以由第 (i) 及 (ii) 部分得

$$A_n = \frac{h}{\sin\theta}, \qquad B_n = \frac{h\cos\theta}{\sin\theta}.$$

把 n 换成 $2n$, h 和 θ 都减半:

$$A_{2n} = \frac{h/2}{\sin(\theta/2)}, \qquad B_{2n} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

第一个结果利用 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ 及 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$:

$$\tfrac{1}{2}(A_n + B_n) = \frac{h}{2}\cdot\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{h}{2}\cdot\frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = B_{2n}.$$

第二个结果利用同一条 $\sin\theta$ 的二倍角公式 (double-angle formula) (以及 $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$):

$$A_n B_{2n} = \frac{h}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\cdot\frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{h^2}{4\sin^2(\theta/2)} = \left(\frac{h/2}{\sin(\theta/2)}\right)^2 = A_{2n}^2.$$

两个结果均已证明。

验算

- $n = 1$: 一个宽 π、高 $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ 的中点矩形给出 $A_1 = \pi$, 与 $\pi/\sin\frac{\pi}{2}$ 相符; 而如前所述 $B_1 = 0$。
- $n = 2$: $A_2 = \frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.2214$, $B_2 = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$; 于是 $\frac{1}{2}(A_1 + B_1) = \frac{\pi}{2} = B_2$, 且 $A_1 B_2 = \frac{\pi^2}{2} = A_2^2$。
- $n = 10$: 直接求和得 $A_{10} \approx 2.00825$ 及 $B_{10} \approx 1.98352$, 分别位于真实面积 2 的两侧。当 $n \to \infty$ 时, $\frac{\pi}{n}\big/\sin\frac{\pi}{2n} \to 2$ 且 $\cos\frac{\pi}{2n} \to 1$, 所以两者都趋向 2, 正合预期。四个结果亦已用电脑就 200 以内的每个 n 逐一验证。

常见错误

- 把中点放在 kh 而不是 $(k-\frac{1}{2})h$, 这样中点法则就变成了在梯形法则节点上的求和。

- 忘记梯形法则中两端的纵坐标要减半。这里两端纵坐标为零，所以 B_n 恰好是 h 乘以内部纵坐标之和。
- 没有化简 $\cos(2n-1)\theta$，而不懂利用 $(2n-1)\theta = \pi - \theta$。

STEP 之外

第 (iii) 部分表明 B_{2n} 是 A_n 与 B_n 的算术平均数（arithmetic mean），而 A_{2n} 是 A_n 与 B_{2n} 的几何平均数（geometric mean）。取倒数后，这就变成先取调和平均数（harmonic mean）、再取几何平均数的模式，正是阿基米德（Archimedes）用圆的外切及内接多边形夹逼 π 的方法，而这种迭代称为 Borchardt 算法（Borchardt's algorithm）。更一般地，比较中点法则与梯形法则的误差（中点法则的误差约为梯形法则误差的一半，且符号相反），便引出辛普森法则（Simpson's rule）和理察森外推法（Richardson extrapolation），两者都是数值分析（numerical analysis）的核心概念。关于这些法则背后的误差分析，可参阅 Bartle 与 Sherbert 所著 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）中有关黎曼积分（Riemann integral）的章节。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。