详细解答

STEP I 2018，第 5 题

纯数学 · 多项式与因式定理

> **STEP I 2018，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q5

关键思路

“在这些点取值 1”其实是一个关于根（root）的陈述：若 $P(k)=1$，则 k 是 $P(x)-1$ 的根，所以 $x-k$ 是它的因式（factor）。只要减去那个共同的值再因式分解（factorise），题目每一部分都会变得容易。在第 (iii) 部分，因式分解把关于 S 的问题，转化为“把一个小数写成四个相异整数之积”的问题，而真正起决定作用的正是“相异”这个条件。

解答

第 (i) 部分

根据余式定理（remainder theorem），$P(x)$ 除以 $x-k$ 的余数是 $P(k)$。所以我们需要 $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=1$，即 $1,2,3,4$ 是 $P(x)-1$ 的根。由于 $P(x)-1$ 的次数（degree）最多为 4，而且有这四个相异的根，它必定是 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的常数倍。因此最一般的这类多项式是

$$P(x)=1+k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4), \qquad k\neq 0,$$

其中需要 $k\neq 0$，次数才会恰好是 4。

第 (ii) 部分

与第 (i) 部分完全一样，$1,2,\ldots,N$ 是 $P(x)-1$ 的 N 个相异根，而它的次数为 N（因为 $N\geq 1$，减去 1 不会改变次数）。所以

$$P(x)-1=k(x-1)(x-2)\cdots(x-N)$$

其中 k 为某常数；又因为 P 的次数为 $N \geq 1$，所以 $k \neq 0$。于是

$$P(N+1) - 1 = k \cdot N(N-1) \cdots 1 = k\,N! \neq 0,$$

因为 k 和 $N!$ 都不为零。所以 $P(N+1) \neq 1$。

若 $P(N+1) = 2$，则 $k\,N! = 1$，所以 $k = \frac{1}{N!}$。对正整数 r，

$$\begin{aligned} P(N+r) &= 1 + \frac{(N+r-1)(N+r-2)\cdots r}{N!} \\ &= 1 + \frac{(N+r-1)!}{(r-1)!\,N!} = 1 + \binom{N+r-1}{N}. \end{aligned}$$

（这个乘积共有 N 个因子，由 $N+r-1$ 递减至 r。）

现在我们希望对每个 N 都有 $1 + \binom{N+r-1}{N} = N + r$。试试较小的 r。取 $r = 1$，得 $P(N+1) = 2$，它只在 $N = 1$ 时才等于 $N+1$。取 $r = 2$，

$$P(N+2) = 1 + \binom{N+1}{N} = 1 + (N+1) = N+2,$$

所以无论 N 是多少，$r = 2$ 都成立。

第 (iii) 部分

四个相异整数 a, b, c, d 是 $S(x) - 2001$ 的根，而它的次数为 4，首项系数（leading coefficient）为 1。所以

$$S(x) = 2001 + (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

(a) 假设对某整数 e 有 $S(e) = 2018$。那么

$$(e-a)(e-b)(e-c)(e-d) = 17.$$

这四个因子都是整数，而且由于 a, b, c, d 互不相同，它们也互不相同。它们都不是 0，因为乘积不为零。

> ? **想一想** 四个相异整数为甚么乘不出一个质数?

在相异的非零整数之中，绝对值为 1 的最多只有两个（即 1 和 -1）。所以四个因子中至少有两个的绝对值不少于 2，而这两个因子之积的绝对值不少于 4。但这个积整除（divides）17，所以它必须是 ± 17；由于 17 是质数（prime），它不能写成两个绝对值都不少于 2 的整数之积。这个矛盾说明不存在整数 e 使 $S(e) = 2018$。

(b) 现在 $S(0) = 2001 + (-a)(-b)(-c)(-d) = 2001 + abcd$，所以 $S(0) = 2017$ 当且仅当

$$abcd = 16.$$

反过来，任何四个乘积为 $abcd = 16$ 的相异整数都给出一个合乎要求的 S（上面的式子是首一（monic）且系数为整数），所以我们要数的是由四个相异整数组成、乘积为 16 的集合 $\{a, b, c, d\}$ 有多少个；每个集合都恰好只有一种方式按递增次序排列。

a, b, c, d 每一个都整除 16，所以其绝对值是 $1, 2, 4, 8, 16$ 之一，而四个绝对值之积为 16。由于这些整数互不相同，每个绝对值最多出现两次（作为 $\pm m$）。把绝对值写成幂 2^p，四个指数之和为 4，且每个指数最多用两次，可能的情况是

$$\{1,1,2,8\}, \qquad \{1,1,4,4\}, \qquad \{1,2,2,4\}.$$

（若用上 16，其余三个便必须是 1、1、1，这是不容许的；而 $\{2,2,2,2\}$ 把 2 用了四次。）现在选取正负号，使乘积为 $+16$：

- $\{1,1,2,8\}$：那一对是 $1, -1$，贡献 -1，所以 2、8 之中恰好有一个是负数。这给出 $\{-2,-1,1,8\}$ 和 $\{-8,-1,1,2\}$。
- $\{1,1,4,4\}$：两对都是 $\pm$，而 $(1)(-1)(4)(-4) = 16$。这给出 $\{-4,-1,1,4\}$。
- $\{1,2,2,4\}$：那一对 $2, -2$ 贡献 -4，所以 1、4 之中恰好有一个是负数。这给出 $\{-4,-2,1,2\}$ 和 $\{-2,-1,2,4\}$。

所以选取 $a < b < c < d$ 共有 **5** 种方法。

验算

- 在第 (ii) 部分取 $N = 1$，则 $P(x) = x$，所以 $P(N + r) = 1 + r$ 与 $1 + \binom{r}{1}$ 相符，而且 $P(3) = 3$。取 $N = 2$，则 $P(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$ 给出 $P(4) = 4$，与 $r = 2$ 的结论一致。
- 对于 (iii)(b)，把五个集合逐一乘出来：例如 $(-2)(-1)(2)(4) = 16$。用电脑搜索 $[-16, 16]$ 内所有由相异整数组成的四元组，找到的正是这五个。
- 对于 (iii)(a)，留意 $2018 - 2001 = 17$ 是质数；若把 2001 换成另一个值，使差变成像 $4 = (-2)(-1)(1)(2)$ 这样的数，这样的 e 便可能存在，所以质数性确实是关键。

常见错误

- 在第 (i) 部分忘记 $k \neq 0$，或只写 $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 1$，而这并不是最一般的多项式。
- 在第 (iii)(b) 部分只数正因数，或忘记 1 和 -1 可以同时使用。
- 写成 $S(0) = 2001 - abcd$：其实共有四个负号，所以乘积是 $+abcd$。

STEP 之外

“一个 N 次多项式由它在 $N+1$ 个点上的值所决定”这个想法，是拉格朗日（Lagrange）插值（Lagrange interpolation）和有限差分（finite differences）的基础；第 (ii) 部分其实就是换了个样子的多项式 $1+\binom{x-1}{N}$。第 (iii) 部分是数论（number theory）中一个标准工具的小例子：若 P 的系数都是整数，则 $m-n$ 整除 $P(m)-P(n)$，这大大限制了多项式在整数上能取的值。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是进一步阅读这类整除论证的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。