详细解答

STEP I 2018，第 4 题

纯数学 · 曲线描绘与积分

> **STEP I 2018，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q4

关键思路

f 的每一部分都由 $\ln x$ 构成，而那个麻烦的因子 $\frac{1}{x}$ 正好是 $\ln x$ 的导数（derivative）。因此代换（substitution）$u = \ln x$ 可把积分变成一个关于 u 的简单有理函数（rational function）的积分。以 u 表示时，把 x 换成 x^{-1} 只是改变 u 的正负号，所以对称性（symmetry）归结为答案是 u 的偶函数（even function）。

解答

全文设 $u = \ln x$。由于 $x \neq 1$，所以 $u \neq 0$；而且 $u > 0$ 当且仅当 $x > 1$。

f 与 f′ 的零点

设

$$g(u) = \frac{(1-u^2)^2}{u} = \frac{1}{u} - 2u + u^3, \qquad \text{从而} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{g(\ln x)}{x}.$$

当 $(\ln x)^2 = 1$ 时，因子 $(1-u^2)^2$ 为零，所以 $\mathrm{f}(x) = 0$。由商法则（quotient rule）及链式法则（chain rule），

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{g'(u)\cdot\frac{1}{x}\cdot x - g(u)}{x^2} = \frac{g'(u) - g(u)}{x^2}.$$

我们已知 $g(\pm 1) = 0$。此外，由于 $(1-u^2)^2 = (1-u)^2(1+u)^2$ 在 $u = \pm 1$ 处有重因子（repeated factor），它的导数 $-4u(1-u^2)$ 在该处亦为零，因此

$$g'(u) = \frac{-4u(1-u^2)\cdot u - (1-u^2)^2}{u^2} = 0 \quad \text{当} u = \pm 1.$$

所以每当 $(\ln x)^2 = 1$，即在 $x = e$ 及 $x = e^{-1}$ 处，亦有 $\mathrm{f}'(x) = 0$。

第 (i) 部分

代入 $u = \ln t$，则 $\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$。于是

$$\int \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{(1-u^2)^2}{u}\,\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right)\mathrm{d}u = \ln|u| - u^2 + \tfrac{1}{4}u^4 + C.$$

定义 $G(u) = \ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4$。F 的两段定义都不会让积分范围跨过 $t = 1$，所以在每一段上 u 的正负号不变，这个原函数（antiderivative）在该处成立。

当 $x > 1$ 时，下限 $t = e$ 给出 $u = 1$，而 $G(1) = 0 - 1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$。当 $0 < x < 1$ 时，下限 $t = e^{-1}$ 给出 $u = -1$，同样有 $G(-1) = -\frac{3}{4}$。因此两种情况得出同一条公式：

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \ln|\ln x| - (\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} \qquad (x > 0,\ x \neq 1).}$$

现在 $\ln(x^{-1}) = -\ln x$。上式中每一处 $\ln x$ 都位于 $|\cdot|$ 之内或被提升至偶数次幂，所以

$$\mathrm{F}(x^{-1}) = \ln|-\ln x| - (-\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(-\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} = \mathrm{F}(x),$$

得证。（两边的常数 $\frac{3}{4}$ 之所以相同，只因为两个下限 e 和 e^{-1} 本身就是一对倒数。）

第 (ii) 部分

> **想一想** F 在哪里递增？在 $x = 1$ 附近会发生甚么事？

斜率 (gradient)。$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$。因子 $(1-u^2)^2$ 永不为负，且 $x > 0$，所以 $\mathrm{f}(x)$ 与 $u = \ln x$ 同号。因此 F 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,\infty)$ 上递增。它仅有的驻点（stationary point）位于 $x = e^{-1}$ 及 $x = e$，而按定义在这两点 $\mathrm{F} = 0$。

这两点并非转向点（turning point）。在 $x = e$ 附近，两侧的斜率都是正的；在 $x = e^{-1}$ 附近，两侧的斜率都是负的。由于 $\mathrm{f}' = \mathrm{F}''$ 在该处亦为零，它们是驻定拐点（stationary point of inflection）。由此可知

$$\mathrm{F}(x) > 0 \text{ 当 } 0 < x < e^{-1} \text{ 及 } x > e, \qquad \mathrm{F}(x) < 0 \text{ 当 } e^{-1} < x < 1 \text{ 及 } 1 < x < e.$$

两端的行为。

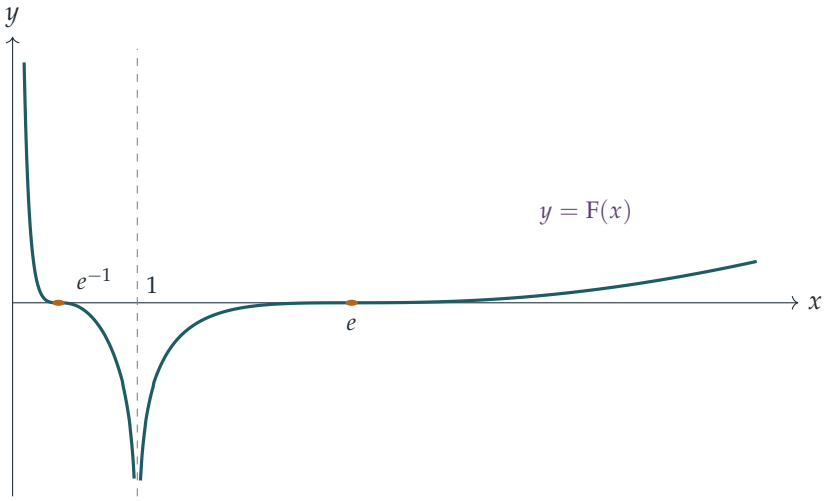
- 当 $x \to 1$ 时，$u \to 0$ 而 $\ln|u| \to -\infty$，其余各项则趋向 $\frac{3}{4}$。所以从两侧都有 $\mathrm{F}(x) \to -\infty$，而 $x = 1$ 是一条垂直渐近线（vertical asymptote）。
- 当 $x \to \infty$ 时，$u \to \infty$，而 $\frac{1}{4}u^4$ 一项占主导，所以 $\mathrm{F}(x) \to \infty$。不过增长非常缓慢：斜率 $\mathrm{f}(x) \approx u^3/x \to 0$。
- 当 $x \to 0^+$ 时，$u \to -\infty$，所以由对称性，同样有 $\mathrm{F}(x) \to \infty$。这里的变化十分陡峭：斜率 $\mathrm{f}(x) \approx u^3/x \to -\infty$。曲线不与 y 轴相交。

凹性（concavity）（用于更仔细的草图）。利用 $\mathrm{F}'' = \mathrm{f}' = (g' - g)/x^2$ 并化简，

$$\mathrm{F}''(x) = -\frac{(u^2-1)(u^3-3u^2-u-1)}{u^2x^2}.$$

三次式 $u^3 - 3u^2 - u - 1$ 只有一个实根，位于 $u \approx 3.38$（它在 $u = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ 处的局部极大值为负）。对于所有较小的 u，它都是负的。所以曲线在 $(0, e^{-1})$ 上向上凹，在 $(e^{-1}, 1)$ 及 $(1, e)$ 上向下凹。从 e 开始曲线向上凹，直至在 $x \approx 29.5$ 处出现另一个拐点，之后向下凹。最后这个拐点远在右方，草图上不必画出。

对称性 $\mathrm{F}(x^{-1}) = \mathrm{F}(x)$ 表示在 x 处的高度与在 $1/x$ 处的高度相同。例如 $\mathrm{F}(2) = \mathrm{F}(\frac{1}{2}) \approx -0.04$ 及 $\mathrm{F}(5) = \mathrm{F}(\frac{1}{5}) \approx 0.31$。因此曲线在 $(1, \infty)$ 上的部分，就是 $(0, 1)$ 上的部分沿水平方向朝渐近线压缩而成。



曲线在 y 轴附近从 $+\infty$ 陡峭地下降，然后逐渐平缓，在 $(e^{-1}, 0)$ 处的驻定拐点触及 x 轴，接着急跌至渐近线 $x = 1$ 处的 $-\infty$。在右边，曲线从 $-\infty$ 回升，在 $(e, 0)$ 处的第二个驻定拐点变得平坦，然后缓慢上升至 $+\infty$。

验算

- 对方框内的公式求导：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right) = \mathrm{f}(x)$，而且公式在 $x = e$ 及 $x = e^{-1}$ 处的值都是 0。
- 数值上，$\int_e^5 \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$ 及 $\int_{1/e}^{1/5} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$，与公式及对称性吻合。
- 正负号亦吻合：在 $(1, e)$ 上函数递增至 0，所以在该处必为负，而事实上 $\mathrm{F}(2) \approx -0.039$。

常见错误

- 在 $0 < x < 1$ 时写成 $\ln(\ln x)$，但此时 $\ln x < 0$。$\frac{1}{u}$ 的原函数是 $\ln|u|$，而正是这个绝对值令对称性成立。
- 在 $x = e^{\pm 1}$ 处画成转向点。由于 f 含有平方因子，它在该处不变号，所以这些是驻定拐点。
- 遗漏 $x = 1$ 处的垂直渐近线，或把两支曲线跨过渐近线连接起来。

STEP 之外

F 由积分定义，而微积分基本定理（fundamental theorem of calculus）指出，在 f 连续的每个区间上都有 $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$。这正是两段定义需要各自的基点的原因：f 在 $x = 1$ 处趋向无穷，所以无法用单一个积分跨越该点。对称变换 $x \mapsto x^{-1}$ 在 $u = \ln x$ 之下变成 $u \mapsto -u$，这是把乘法对称转化为加法对称的一个小例子，而这个想法贯穿整个分析学。如欲仔细了解微积分基本定理及瑕积分（improper integral），可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。