详细解答

STEP I 2018，第 3 题

纯数学 · 角与双曲线

STEP I 2018，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s1-q3

关键思路

两个角都可以通过正切（tangent）与 P 的坐标联系起来：RP 的斜率给出 $\tan\alpha$，SP 的斜率给出 $\tan\beta$。于是条件 $\beta = 2\alpha$ 就变成 tan 的二倍角恒等式（double-angle identity），消去分母后便得到该曲线。第 (ii) 部分则把同样的代数步骤倒过来进行。难点在于：知道 $\tan\beta = \tan 2\alpha$ 只能确定 β 至相差 π 的整数倍，因此我们必须留意 2α 位于哪一个象限（quadrant）。

解答

设置两个角

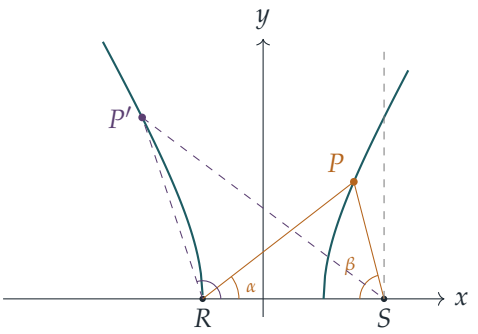
由于 $y > 0$，在 R 处的角 α 是由正 x 方向（沿 RS）转到 RP 量度的，所以 $0 < \alpha < \pi$，而且

$$\tan\alpha = \frac{y}{x+a} \qquad (x \neq -a).$$

无论 P 在 R 的右方（α 为锐角，正切为正）还是左方（α 为钝角，正切为负），此式都成立。在 S 处，角 β 是由负 x 方向（沿 SR）量度到 SP 的。因为 $x < 2a$，点 P 在 S 的左方，所以 β 为锐角，而且

$$\tan\beta = \frac{y}{2a-x} > 0, \qquad 0 < \beta < \tfrac{\pi}{2}.$$

当 $x \neq -a$ 时，记 $t = \tan\alpha$。



曲线 $y^2 = 3(x^2 - a^2)$ 在 $y > 0$、$x < 2a$ 的部分（图中取 $a = 1$）由两段组成：右支上 $a < x < 2a$ 的一段弧，以及整条左支的上半部分 $x < -a$。左支上的点 P' 会令 α 成为钝角。

第 (i) 部分

设 $\beta = 2\alpha$。由于 $\beta < \frac{\pi}{2}$，我们有 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$，故 $x > -a$、$0 < t < 1$，而且在 $1 - t^2 \neq 0$ 的情况下可以使用二倍角公式：

$$\frac{y}{2a - x} = \tan 2\alpha = \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2y/(x + a)}{1 - y^2/(x + a)^2} = \frac{2y(x + a)}{(x + a)^2 - y^2}.$$

消去 y（因 $y > 0$，这是容许的），再交叉相乘：

$$\begin{aligned}(x + a)^2 - y^2 &= 2(x + a)(2a - x)\\ \iff \quad y^2 &= (x + a)\big[(x + a) - 2(2a - x)\big] = (x + a)(3x - 3a) = 3(x^2 - a^2).\end{aligned}$$

所以 P 位于 $y^2 = 3(x^2 - a^2)$ 上，得证。

第 (ii) 部分

现在设 P 位于该曲线上，且 $y > 0$、$x < 2a$。于是 $x^2 - a^2 = \frac{1}{3}y^2 > 0$，故 $|x| > a$：即 $a < x < 2a$ 或 $x < -a$。特别地，$x \neq -a$，所以 $t = \tan\alpha$ 有定义，而且 $t \neq 0$。

第 (i) 部分的步骤可以倒推。曲线方程等价于 $(x + a)^2 - y^2 = 2(x + a)(2a - x)$。两边除以 $(x + a)^2$，并利用 $2a - x = y/\tan\beta$，得

$$1 - t^2 = \frac{2(2a - x)}{x + a} = \frac{2y}{(x + a)\tan\beta} = \frac{2t}{\tan\beta}, \qquad \text{故} \qquad (1 - t^2)\tan\beta = 2t.$$

若 $t^2 = 1$，此式会给出 $t = 0$，这是不可能的；所以 $t^2 \neq 1$，而且

$$\tan\beta = \frac{2t}{1 - t^2} = \tan 2\alpha.$$

想一想 $\tan\beta = \tan 2\alpha$ 是否意味着 $\beta = 2\alpha$?

不一定：它只表示 β 与 2α 相差 π 的整数倍。我们利用已知的角的大小范围，按曲线的两段分情况讨论。

情况 $a < x < 2a$。此时 $x + a > 0$，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，且 $0 < 2\alpha < \pi$。由于 $\tan 2\alpha = \tan\beta > 0$, 2α 位于 $(0, \frac{\pi}{2})$, 与 β 在同一区间。由于 tan 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是一一对应 (one-to-one) 的,

$$\beta = 2\alpha.$$

情况 $x < -a$。此时 $x + a < 0$，所以 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，且 $\pi < 2\alpha < 2\pi$。由于 $\tan 2\alpha > 0$, $2\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$，故 $2\alpha - \pi \in (0, \frac{\pi}{2})$，且 $\tan(2\alpha - \pi) = \tan 2\alpha = \tan\beta$。同前，tan 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是一一对应的，所以

$$\beta = 2\alpha - \pi.$$

因此可能的关系是 $\beta = 2\alpha$（当 P 在右支上）和 $\beta = 2\alpha - \pi$（当 P 在左支上)。两者都会出现，因为每一段上的每一点都满足所给条件。

验算

- 取 $a = 1$ 及 $P = (-2, 3)$, 由于 $3(4-1) = 9$, 此点在曲线上。于是 $\tan\alpha = 3/(-1) = -3$, 故 $\alpha \approx 108.43°$；又 $\tan\beta = \frac{3}{4}$，故 $\beta \approx 36.87°$。确实 $2\alpha - 180° \approx 36.87°$。
- 在右支上当 $x \to 2a$ 时, $y \to 3a$, 所以 $\tan\alpha \to 1$ 而 $\tan\beta \to \infty$: $\alpha \to \frac{\pi}{4}$, $\beta \to \frac{\pi}{2} = 2\alpha$。
- 在左支上远离原点时，P 趋近渐近线（asymptote）$y = -\sqrt{3}\,x$，所以 $\alpha \to \frac{2\pi}{3}$，$\beta \to \frac{\pi}{3} = 2\alpha - \pi$。

我们亦以电脑在每一支上的大量随机点、并取随机的 a，验证了这两个关系，结果一致。

常见错误

- 写成 $\tan\alpha = y/|x + a|$，或假设 α 为锐角。在左支上 α 是钝角，且 $\tan\alpha < 0$。
- 未检查角的范围，便由 $\tan\beta = \tan 2\alpha$ 断定 $\beta = 2\alpha$。这样会漏掉第二个关系。
- 忘记 $x < 2a$ 和 $y > 0$ 把曲线限制为两段，以及需要 $|x| > a$ 来排除 $x = -a$。

STEP 之外

这条曲线是一条离心率（eccentricity）为 2、焦点（focus）为 S、准线（directrix）为 $x = \frac{a}{2}$ 的双曲线（hyperbola）。第 (i) 部分的性质给出了利用双曲线三等分角（trisect an angle）的经典方法（帕普斯（Pappus）已知晓），从而绕过了仅用尺规不能三等分角这一不可能性。这个不可能性的证明本身，是域论（field theory）入门课程的亮点之一。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）涵盖了这部分内容，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）则是探讨角与圆锥曲线几何的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。