详细解答

STEP I 2018，第 2 题

纯数学 · 对数不等式

> **STEP I 2018，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q2

关键思路

一切都建基于换底公式（change-of-base rule）：任何底数的对数（logarithm）都可以写成同一底数下两个对数之比，而且 $\frac{1}{\log_b c} = \log_c b$。只要把每个对数都改写成以 ln 表示，每一部分就变成一小段涉及不等式（inequality）的代数运算。题目给出的事实，例如 $\mathrm{e}^2 < 8$，其实只是 $\ln 2$ 和 $\ln 10$ 的界的另一种写法。整个过程中，我们都会用到 ln 是递增（increasing）函数这一事实，因此对两个正数之间的不等式取对数，不等号的方向保持不变。

解答

开首的结果

根据对数的定义，$x = \log_b c$ 的意思是

$$c = b^x.$$

两边取以 a 为底的对数，并利用 $\log_a(b^x) = x \log_a b$，得

$$\log_a c = x \log_a b.$$

由于 $b \neq 1$（否则 $\log_b$ 没有意义），所以 $\log_a b \neq 0$，可以相除：

$$\frac{\log_a c}{\log_a b} = x = \log_b c,$$

得证。下文会用到两个推论。取 $a = c$ 得 $\log_b c = \dfrac{1}{\log_c b}$；取 $a = \mathrm{e}$ 得 $\log_b c = \dfrac{\ln c}{\ln b}$。

第 (i) 部分

根据倒数（reciprocal）法则，$\dfrac{1}{\log_2 \pi} = \log_\pi 2$ 及 $\dfrac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 5$。所以

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10.$$

由于 $\pi > 1$，函数 $\log_\pi$ 是递增的，而 $10 > \pi^2$，因此

$$\log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2,$$

这正是所求的不等式。

第 (ii) 部分

把第一个已知事实改写成自然对数（natural logarithm）：

$$\log_2 \frac{\pi}{\mathrm{e}} = \frac{\ln \pi - 1}{\ln 2} > \frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad \ln \pi > 1 + \frac{\ln 2}{5},$$

这里我们乘以 $\ln 2 > 0$，所以不等号方向不变。

> **想一想** $\mathrm{e}^2 < 8$ 告诉我们甚么?

它是 $\ln 2$ 的一个下界（lower bound）。两边取 ln（由于 ln 是递增的，这样做是容许的），得 $2 < \ln 8 = 3 \ln 2$，所以 $\ln 2 > \frac{2}{3}$。代入，得

$$\ln \pi > 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{15} = \frac{17}{15},$$

得证。

第 (iii) 部分

由 $\pi^2 < 10$，取对数得 $2 \ln \pi < \ln 10$。所以只需证明 $\ln 10 < \frac{30}{13}$。

把另外两个事实改写。由于 $\mathrm{e}^3 > 20$，我们有 $3 > \ln 20 = \ln 2 + \ln 10$，即

$$\ln 2 < 3 - \ln 10.$$

此外，$\log_{10} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 10} > \dfrac{3}{10}$，而由于 $\ln 10 > 0$，

$$\ln 10 < \frac{10}{3} \ln 2.$$

第一式是 $\ln 2$ 的一个上界（upper bound），而 $\ln 2$ 在第二式中的系数（coefficient）是正数，所以可以把它代入：

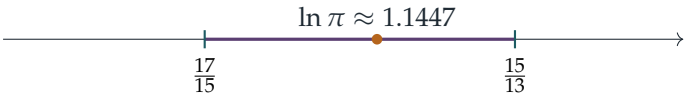
$$\ln 10 < \frac{10}{3} (3 - \ln 10) = 10 - \frac{10}{3} \ln 10.$$

合并 $\ln 10$ 的项，得 $\frac{13}{3}\ln 10 < 10$，所以 $\ln 10 < \frac{30}{13}$。因此

$$\ln \pi < \tfrac{1}{2}\ln 10 < \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{30}{13} = \frac{15}{13},$$

得证。

第 (ii) 和第 (iii) 部分合起来，把 $\ln \pi$ 困在一个狭窄的区间（interval）之内：



验算

以数值计算，$\ln \pi \approx 1.1447$，确实介乎 $\frac{17}{15} \approx 1.1333$ 与 $\frac{15}{13} \approx 1.1538$ 之间。在第 (i) 部分，$\log_\pi 10 \approx 2.0115$，只是稍稍大于 2，这与 $\pi^2 \approx 9.87$ 非常接近 10 的情况吻合。与 $\ln 10 \approx 2.3026$ 比较，界 $\ln 10 < \frac{30}{13} \approx 2.3077$ 也是成立的。题目给出的事实也值得核实一下：$\log_2(\pi/\mathrm{e}) \approx 0.209$、$\mathrm{e}^2 \approx 7.39$、$\mathrm{e}^3 \approx 20.09$ 及 $\log_{10} 2 \approx 0.3010$。

常见错误

- 把 $\dfrac{1}{\log_2 \pi}$ 写成 $\log_2 \frac{1}{\pi}$。取倒数是把底数和真数互换，而不是把真数取倒数。
- 在第 (iii) 部分，在需要 $\ln 2$ 的上界时错用了下界。只有当每个界都指向同一方向时，才可以把不等式串连起来。
- 在不等式两边相乘或取对数之前，忘记说明 $\ln 2$、$\ln 10$ 和 $\log_\pi$ 的性质良好（为正数，或是递增的）。

STEP 之外

从寥寥几个粗略的事实推导出数值上的界，让我们稍稍体会到分析学家如何估计常数：分析（analysis）的很大一部分，就是把一个未知的量困在两个你能掌握的估计之间。$\ln 2$ 或 π 更精确的界来自级数（series）和积分不等式，例如用矩形来估计 $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是引导读者进入这种思考方式的一本亲切入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。