详细解答

STEP I 2018，第 13 题

概率与统计 · 二项分布与贝叶斯定理

STEP I 2018，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s1-q13

关键思路

一切都建基于一个简单的计算：若考生作答 k 题，其中答对 j 题，则得分为 $2j-(k-j)=3j-k$。因此合格即表示至少答对 $(k+5)/3$ 题，而对每个 k，这就准确告诉我们要把哪些二项式项相加。在第 (iii) 部分，巧妙的做法是把每一题看成有三种结果（答对、答错、未作答），这样整个问题就化为单一的多项计数（multinomial count）。

解答

全文设 $p=\frac{1}{n}$ 为随机选出的答案正确的概率（probability），并设 $q=1-p$。由于 $n\geq 2$，故 $0<p\leq\frac{1}{2}$。

第 (i) 部分

设 P_k 为 A 恰好作答 k 题时合格的概率。她的各次选择互相独立（independent），所以她答对的题数 J 服从二项分布（binomial distribution）$\mathrm{B}(k,p)$。她的得分为 $3J-k$，所以她合格当且仅当

$$3J-k\geq 5 \iff J\geq\frac{k+5}{3}.$$

逐一考虑 k 的各个值：

- $k=0,1,2$：分别需要 $J\geq\frac{5}{3},2,\frac{7}{3}$，即 $J\geq 2$、$J\geq 2$ 及 $J\geq 3$，但 $J\leq k$，故这些都不可能（最高得分为 $2k\leq 4$）。所以 $P_0=P_1=P_2=0$。
- $k=3$：需要 $J\geq\frac{8}{3}$，即 $J=3$，所以 $P_3=p^3$。

▶ $k=4$：需要 $J \geq 3$，所以

$$P_4 = \binom{4}{3} p^3 q + p^4 = 4p^3(1-p) + p^4 = p^3(4-3p).$$

▶ $k=5$：需要 $J \geq \frac{10}{3}$，即 $J = 4$ 或 5，所以

$$P_5 = \binom{5}{4} p^4 q + p^5 = 5p^4(1-p) + p^5 = p^4(5-4p).$$

现在把 P_4 与它的两个对手比较。由于 $p < 1$，有 $4-3p > 1$，所以 $P_4 > p^3 = P_3$。此外

$$P_4 - P_5 = p^3\big[(4-3p) - p(5-4p)\big] = p^3\big(4p^2 - 8p + 4\big) = 4p^3(1-p)^2 > 0,$$

因为 $0 < p < 1$。又因 $P_4 > 0$，亦胜过 $P_0 = P_1 = P_2 = 0$，所以 P_4 严格最大，故 A 应选择 $k = 4$，得证。

想一想 作答全部五题，岂不是必然有更多得分机会?

在这里并非如此。作答五题时，她需要答对四题，因为第五题一旦答错便会扣一分，而答错的机会远比答对大。作答四题时，答对三题便已足够。因式分解（factorisation）$4p^3(1-p)^2$ 显示，这个优势对每个 $n \geq 2$ 都成立，而不仅限于 n 很大的情况。

第 (ii) 部分

设 K 为 B 作答的题数，所以对 $k = 0, \ldots, 5$ 有 $\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{6}$；并设 S 为 B 合格这一事件。在 $K = k$ 的条件下，B 的处境与 A 完全相同，所以 $\mathrm{P}(S \mid K = k) = P_k$。由贝叶斯定理（Bayes' theorem），

$$\mathrm{P}(K = 4 \mid S) = \frac{\frac{1}{6}P_4}{\frac{1}{6}(P_0 + P_1 + \cdots + P_5)} = \frac{p^3(4-3p)}{p^3 + p^3(4-3p) + p^4(5-4p)}.$$

约去 p^3（它不为零）后，分母变为 $1 + 4 - 3p + 5p - 4p^2 = 5 + 2p - 4p^2$，所以

$$\mathrm{P}(K = 4 \mid S) = \frac{4-3p}{5+2p-4p^2}.$$

代入 $p = \frac{1}{n}$，并把分子和分母同乘以 n^2：

$$\mathrm{P}(K = 4 \mid S) = \frac{4n^2 - 3n}{5n^2 + 2n - 4} = \frac{n(4n-3)}{5n^2 + 2n - 4}.$$

第 (iii) 部分

对每一题而言，C 掷硬币的结果与她所选的答案互相独立，亦与其他题目的情况独立。所以每一题各自独立地有三种结果之一：

$$\begin{aligned} \text{答对 } (+2): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}, \\ \text{答错 } (-1): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n+1}, \\ \text{未作答 } (0): &\quad \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

设她答对 c 题、答错 w 题，其中 $c+w\le 5$。她合格当 $2c-w\ge 5$。这迫使 $c\ge 3$，然后：

- $c=3$：需要 $w\le 1$；
- $c=4$：由于 $c+w\le 5$，$w\le 1$ 自动成立；
- $c=5$：$w=0$。

把 c 题答对、w 题答错、$5-c-w$ 题未作答分配到各题的方法数，就是多项系数（multinomial coefficient）$\frac{5!}{c!\,w!\,(5-c-w)!}$。由于答对与未作答的概率同为 $\frac{1}{n+1}$，每一种排列的概率都是 $\frac{(n-1)^w}{(n+1)^5}$。把五种情况相加：

(c,w)	排列数	概率 $\times(n+1)^5$
$(3,0)$	10	10
$(3,1)$	20	$20(n-1)$
$(4,0)$	5	5
$(4,1)$	5	$5(n-1)$
$(5,0)$	1	1

总和为 $16+25(n-1)=25n-9$，所以

$$\mathrm{P}(\text{C 合格}) = \frac{25n-9}{(n+1)^5}.$$

验算

- 当 $n=2$：$P_3=\frac{1}{8}$，$P_4=\frac{5}{16}$，$P_5=\frac{3}{16}$，所以 $k=4$ 胜出。在 (ii) 中，公式给出 $\frac{2\cdot 5}{20}=\frac{1}{2}$，与直接计算 $\frac{5/16}{10/16}$ 的结果吻合。
- 对于 (iii)，当 $n=3$ 时答案为 $\frac{66}{1024}\approx 0.0645$，而以电脑模拟 200 000 次测验得出 0.0644。三条公式亦与电脑对 $n=2,\dots,29$ 作精确穷举的结果一致。

- 当 $n \to \infty$，(ii) 的答案趋向 $\frac{4}{5}$：当猜题几乎毫无希望时，合格几乎总是来自作答四题（需答对三题），而非作答五题（需答对四题）或作答三题（需三题全对，概率为 p^3，远小于 $4p^3$）。

常见错误

- 忘记作答五题时答对三题只得 $6-2=4$ 分，并不合格：需要答对四题。
- 在 (ii) 中，分母漏了 P_3：作答三题而三题全对，也是合格的一种途径。
- 在 (iii) 中，把问题看成“以概率 $\binom{5}{k}h^k(1-h)^{5-k}$ 作答 k 题”，然后套用第 (i) 部分，这样做是可行的，但很容易漏掉某一项；三种结果的计数方法较为简洁。

STEP 之外

第 (iii) 部分是*稀疏化*（thinning）的一个例子：每一题以某个概率被保留，而各结果仍然互相独立，所以答对、答错及跳过的题数服从多项分布（multinomial distribution）。第 (ii) 部分则是贝叶斯更新（Bayesian updating），这是现代统计学很大部分背后的思想。两者在 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率论导引》）以及 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率论入门》）中都有深入阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。