详细解答

STEP I 2018，第 11 题

力学 · 斜面上的摩擦力

STEP I 2018，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s1-q11

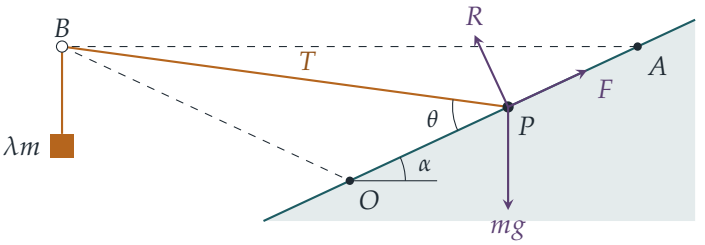
关键思路

先从几何入手：$OA = OB = d$，所以三角形 OAB 是等腰三角形（isosceles triangle）；又因为 AB 是水平的，它的两个底角都是 α。绳子由 P 往回越过 O 的一侧伸向 B，因此它一方面把 P 沿斜面向下拉，另一方面把 P 拉离斜面。于是摩擦力（friction）必须把质点托住，而法向反作用力（normal reaction）则因张力（tension）而减小。每个平衡（equilibrium）条件都是一条关于 θ 的不等式，而且必须对第 (i) 部分所得范围内的每一个 θ 都成立，所以我们要找出最不利的位置。

解答

把 P 和悬挂的物体视为质点（particle），绳子视为轻而不可伸长（light and inextensible），滑轮视为光滑（smooth），因此整条绳子的张力处处相同。悬挂的质点处于平衡，所以

$$T = \lambda mg.$$



第 (i) 部分

把 O 放在原点，x 轴取水平方向。于是 $A = (d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$。点 B 与 A 等高，且与 O 的距离为 d，所以 $B = (\pm d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$。取正号得到的就是 A 本身，因此

$$B = (-d\cos\alpha,\ d\sin\alpha).$$

此点位于斜面所在直线的上方，并在 O 相对于 A 的另一侧。在三角形 OAB 中，$OA = OB = d$；又因为 AB 水平而 AO 与水平线成角 α，所以 $\angle OAB = \alpha$。因此 $\angle OBA = \alpha$ 亦成立，而 $\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha$；由于 $\alpha < 45^\circ$，这是一个钝角。

设 P 位于 OA 上。绳子沿 PB 伸展，它与 L 所成的锐角为 $\theta = \angle BPO$。这个角是锐角，因为它至多是 $2\alpha < 90^\circ$，下面就来证明。它是三角形 PAB 的一个外角（exterior angle），所以

$$\theta = \angle BPO = \angle PAB + \angle PBA = \alpha + \angle PBA.$$

当 P 由 O 移向 A 时，射线 BP 由 BO 转向 BA，所以 $\angle PBA$ 由 $\angle OBA = \alpha$ 递减至 0。因此

$$\alpha \le \theta \le 2\alpha,$$

当 P 在 O 时 $\theta = 2\alpha$，而当 P 趋近 A 时 $\theta \to \alpha$。

留意这对各力意味着甚么。从沿斜面向下的方向 PO 量起，绳子成锐角 θ，并指向离开斜面的一方。所以张力有沿斜面向下的分量 $T\cos\theta$，以及垂直于斜面、把 P 拉离斜面的分量 $T\sin\theta$。

第 (ii) 部分

沿垂直于斜面的方向分解（resolving）：

$$R = mg\cos\alpha - T\sin\theta = mg(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

> ? **想一想** 在这一部分中，既然我们不知道 μ，摩擦力去了哪里？

我们根本不需要它。无论 μ 是多少，P 都必须与斜面保持接触，所以需要 $R \ge 0$。（事实上 $R > 0$：若 $R = 0$，就没有摩擦力，沿斜面方向便没有任何力可以平衡 $mg\sin\alpha + T\cos\theta > 0$。）因此，要在每一点都能平衡，必须有

$$\lambda\sin\theta \le \cos\alpha \quad \text{对所有出现的}\theta\ \text{成立}.$$

由于 sin 在 $[\alpha, 2\alpha] \subset [0^\circ, 90^\circ)$ 上递增，$\sin\theta$ 的最大值出现在 $\theta = 2\alpha$（或当 P 趋近 O 时任意接近它）。因此 $\lambda\sin 2\alpha \le \cos\alpha$，即 $2\lambda\sin\alpha\cos\alpha \le \cos\alpha$。两边除以 $\cos\alpha > 0$，得

$$2\lambda\sin\alpha \le 1,$$

即为所求。

第 (iii) 部分

重力和张力都把 P 沿斜面向下拉，所以摩擦力 F 沿斜面向上作用。沿斜面方向分解，

$$F = mg\sin\alpha + T\cos\theta = mg(\sin\alpha + \lambda\cos\theta).$$

在此位置能够平衡，当且仅当 $F \le \mu R$（由于 $F > 0$，这同时迫使 $R > 0$）。设 $\mu = \tan\beta$，条件为

$$\sin\alpha + \lambda\cos\theta \le \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

两边乘以 $\cos\beta > 0$，并把含 λ 的项归在一起：

$$\lambda(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta) \le \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha,$$
$$\lambda\cos(\beta - \theta) \le \sin(\beta - \alpha).$$

这里 $0 < \beta < 90^\circ$ 且 $0 < \theta \le 2\alpha < 90^\circ$，所以 $-90^\circ < \beta - \theta < 90^\circ$，从而 $\cos(\beta - \theta) > 0$。因此，在角度为 θ 的位置能够平衡，恰好当

$$\lambda \le \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \theta)}.$$

要使此式在每一个位置都成立，它必须在 $\cos(\beta - \theta)$ 最大之处成立，也就是在范围 $\alpha \le \theta \le 2\alpha$ 容许下 θ 最接近 β 之处。

*情况 $\beta \ge 2\alpha$。*范围内每一个 θ 都不超过 β，所以 $0 \le \beta - 2\alpha \le \beta - \theta \le \beta - \alpha < 90^\circ$。余弦在 $[0^\circ, 90^\circ)$ 上递减，所以 $\cos(\beta - \theta)$ 在 $\theta = 2\alpha$ 处最大，即位于 O（或紧邻 O）的位置。因此一个必要条件是

$$\lambda \le \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - 2\alpha)}.$$

这也是充分条件，因为在其他每一个位置，对 λ 的限制都较宽松。

*情况 $\alpha \le \beta \le 2\alpha$。*此时 $\theta = \beta$ 落在范围之内：由第 (i) 部分，P 在 L 上介于 O 与 A 之间的某个位置恰好给出这个角（若 $\beta = \alpha$，则是当 $P \to A$ 时趋近）。在那里 $\cos(\beta - \theta) = 1$，即其最大可能值，条件变为

$$\lambda \le \sin(\beta - \alpha).$$

在该位置，绳子垂直于总接触力；当摩擦力达到极限时，总接触力与法线成角 β。若 $\beta = \alpha$，这迫使 $\lambda = 0$：此时质点单凭自身重量就已刚好处于极限平衡（limiting equilibrium），任何绳子张力都会令它滑动。

验算

- 当 $\beta = 2\alpha$ 时两个答案一致：此时 $\cos(\beta - 2\alpha) = 1$，两者都给出 $\lambda \le \sin\alpha$。

- 当 $\lambda = 0$ 时，条件变为 $\sin(\beta - \alpha) \geq 0$，即 $\mu \geq \tan\alpha$，这正是物块能静止于粗糙斜面上的熟悉条件。
- 对于 $\alpha = 20°$、$\beta = 50°$，界限为 $\sin 30° / \cos 10° \approx 0.508$。一项电脑验算把 P 放在 OA 上的许多点，直接分解各力，结果发现对于数以千计的随机 α 和 β，使各处皆能平衡的最大 λ 都与两条公式吻合。它亦证实了 $\alpha \leq \theta \leq 2\alpha$。

常见错误

- 把 B 放在 O 与 A 同一侧。由于 $OB = OA$ 而 $B \neq A$，B 位于 O 的另一侧，所以张力把 P 沿斜面向下拉，而不是向上。
- 忘记张力会减小法向反作用力，从而减少可用的摩擦力。
- 在第 (iii) 部分的第二种情况中只检查两端的位置。最不利的位置是 $\theta = \beta$ 之处，它位于内部。

STEP 之外

组合式 $\lambda\cos(\beta - \theta) \leq \sin(\beta - \alpha)$ 是*摩擦角*（angle of friction）的代数形式：总接触力必须落在与法线成角 β 的范围之内，即所谓的摩擦锥（cone of friction）。只要从这个锥的角度思考，许多摩擦问题都能化为一行几何。要求“对每一个位置”都能平衡，其实是一个小型的最优化问题；工程师按最坏情况进行设计时，也是用同样的方式推理。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）细致地处理摩擦力和受力图，并附有大量具挑战性的习题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。