详细解答

STEP I 2018，第 10 题

力学 · 连接质点

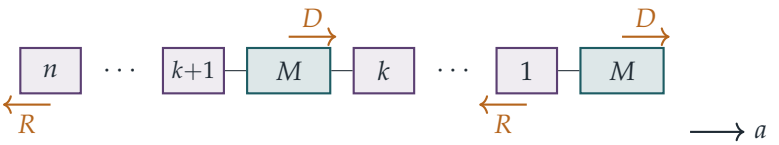
> **STEP I 2018，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q10

关键思路

每节车辆的加速度（acceleration）都相同，所以我们先由整列火车求出加速度一次，再对火车中最方便的那一部分应用牛顿第二定律（Newton's second law）：在某个连接器（coupling）处把火车“切开”，该连接器的张力（tension）就会显露为一个外力（external force）。令后面各部分变得容易的技巧，是用两种方法求最前方的张力 T：一次从前方机车入手，一次从它后面的所有车辆入手。这样做会把 T 与单一个量 $R+ma$ 联系起来，而这个量同时支配著其他每一个连接器。

解答

模型。 把每辆机车和每节车厢视为沿水平路轨运动的质点（particle），并把连接器视为可以受拉或受压（compression）的轻杆（light rods）。机车不受阻力（resistance），而每节车辆所受的铅垂方向的力互相平衡，所以只需考虑水平方向的力。加速度 a 以运动方向为正。由前至后把车厢编号为 $1,2,\ldots,n$，使车厢 $1,\ldots,k$ 位于两辆机车之间，而 $k+1,\ldots,n$ 位于第二辆机车之后（其中 $1\le k\le n-1$）。



（每节车厢都受一个向后的阻力 R；图中只画出其中两个。）

加速度。 整列火车的质量为 $nm+2M$，而连接器的力属于内力，所以

$$(nm+2M)a = 2D - nR, \qquad a = \frac{2D-nR}{nm+2M} > 0,$$

由于 $2D > nR$，所以加速度为正。特别地，$R+ma>0$，这个事实我们会反复用到。

第 (i) 部分

前方机车受向前的力 D，以及其连接器向后的张力 T，所以

$$D - T = Ma.$$

因此

$$\begin{aligned} T = D - \frac{M(2D-nR)}{nm+2M} &= \frac{D(nm+2M) - 2MD + nMR}{nm+2M} \\ &= \frac{n(mD+MR)}{nm+2M}, \end{aligned}$$

即为所求。

T 的一个更简洁形式。 现在改为考虑前方机车后面的所有车辆：一辆机车和 n 节车厢，总质量为 $M+nm$。它们受 T 和第二辆机车的 D 向前拉动，并受阻力 nR：

$$T + D - nR = (M+nm)a.$$

从此式减去 $D - T = Ma$ 便可消去 D：

$$2T - nR = nma, \qquad \text{所以} \qquad T = \tfrac{1}{2}n\,(R+ma).$$

第 (ii) 部分

除最前方的连接器外，其他每个连接器都属于以下两类之一。

第二辆机车前面的连接器。 对于 $1 \le j \le k$，设 T_j 为紧接车厢 j 后方的连接器的张力（因此 T_k 是车厢 k 与第二辆机车之间的连接器）。前方机车连同车厢 $1,\dots,j$ 的质量为 $M+jm$，并受 T_j 向后拉：

$$D - jR - T_j = (M+jm)a \quad \Longrightarrow \quad T_j = (D-Ma) - j(R+ma) = T - j(R+ma).$$

由于 $R+ma>0$ 且 $j \ge 1$，无论 k 是多少，这类连接器全部都有 $T_j < T$。

第二辆机车后面的连接器。 对于 $k+1 \le j \le n$，设 S_j 为紧接车厢 j 前方的连接器的张力。最简单的做法是考虑它后面的车辆：车厢 $j,\dots,n$，共 $n-j+1$ 节，只受 S_j 向前拉：

$$S_j - (n-j+1)R = (n-j+1)ma \quad \Longrightarrow \quad S_j = (n-j+1)(R+ma).$$

想一想 这些后方连接器中，哪一个的张力最大？它与 T 相比又如何？

张力 S_j 随 j 增大而减小，所以最大的是 $S_{k+1} = (n-k)(R+ma)$，位于紧接第二辆机车后方的连接器。将它与 $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$ 比较，并除以 $R+ma > 0$，得

$$S_{k+1} < T \iff n-k < \tfrac{1}{2}n \iff k > \tfrac{1}{2}n.$$

所以若 $k > \frac{1}{2}n$，每个后方连接器的张力至多为 $S_{k+1} < T$，而每个前方连接器都有 $T_j < T$。因此 T 大于其他任何连接器的张力，即为所求。（这个条件也是必要的：若 $k \le \frac{1}{2}n$，则 $S_{k+1} \ge T$。）

第 (iii) 部分

考虑车厢 k 与第二辆机车之间的连接器。由第 (ii) 部分及 $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$，

$$T_k = T - k(R+ma) = \left(\tfrac{1}{2}n - k\right)(R+ma).$$

若 $k > \frac{1}{2}n$，第一个因子为负而第二个因子为正，所以 $T_k < 0$：这个连接器处于受压状态。从物理角度看，第二辆机车正在推动它前面的 k 节车厢（超过整列火车的一半），同时前方机车在拉动它们。

验算

- 取 $n=5$、$k=3$、$M=10$、$m=2$、$D=20$、$R=1$。则 $a = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$，公式给出 $T = \frac{5(40+10)}{30} = \frac{25}{3}$，与 $D - Ma = 20 - \frac{35}{3}$ 相符。沿火车由前往后，各张力依次为 $\frac{25}{3}, 5, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}$（车厢 3 至机车），然后是 $\frac{20}{3}, \frac{10}{3}$。所以 T 最大，而且恰好有一个连接器受压，与预测一致。
- 若 $M=0$，机车就只是力，此时 $T = D$，这正是无质量的前方机车应有的结果。
- 每个张力都是一个力乘以一个无量纲（dimensionless）比值，所以单位正确。

常见错误

- 把阻力也加在机车上：题目只说车厢受阻力。
- 忘记第二辆机车的驱动力作用于任何包含它的火车部分。
- 假设每个连接器都必定受拉；连接器是一根杆，所以负张力是完全合乎物理的推力。

STEP 之外

把一个系统分拆成若干部分，并为每一部分分别画出受力图（free-body diagram），其中内力（internal forces）以大小相等、方向相反的成对形式出现，这是连接体力学的基础。在大学一年级的课程中，这会发展为桁架（truss）和框架（framework）的分析：你要同时求出多根构件的内力，而有些构件会原来是受压的支柱（strut），而不是受拉的拉杆（tie）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）细致地讨论了受力图和牛顿第三定律（Newton's third law）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。