详细解答

STEP I 2018，第 1 题

纯数学 · 曲线之间的面积

> **STEP I 2018，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q1

关键思路

令三次曲线（cubic）与直线相等，会先得到因式 x，余下的是一个平方差（difference of two squares），因此三个交点都能干净利落地求出。之后的一切都是常规的微积分运算，而代换（substitution）$c = b - a$（即 P 的 x 坐标）能令代数运算保持整洁。最后的不等式乍看令人生畏，但只要把两个面积都以 c 表示，它便简化为 $b > a$。

解答

交点与草图

在交点处，$x(b-x)^2 = a^2x$，所以 $x = 0$（即原点），或

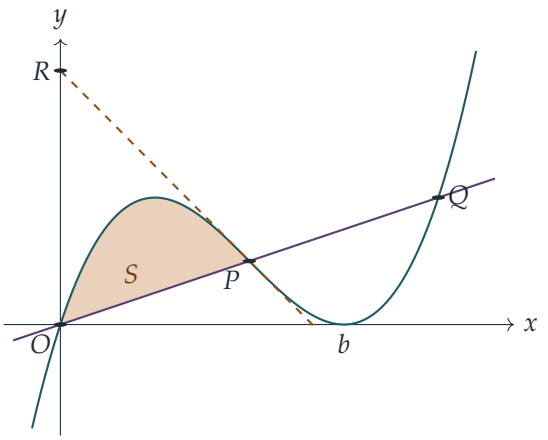
$$(b-x)^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad b - x = \pm a \quad \Longrightarrow \quad x = b - a \text{ 或 } x = b + a.$$

由于 $a > 0$，$b - a < b + a$，所以

$$P = (b-a,\ a^2(b-a)), \qquad Q = (b+a,\ a^2(b+a)).$$

因为 $0 < a < b$，两点都位于第一象限（first quadrant）。

至于草图：三次曲线 $y = x(b-x)^2$ 在 O 有一个单根，在 $x = b$ 有一个重根（repeated root），曲线在该处与 x 轴相切。当 $x < 0$ 时曲线为负，当 $x > 0$ 时曲线为正（$x = b$ 除外），而当 $x \to \infty$ 时曲线趋向 $+\infty$。其导数（见下文）为 $(b-x)(b-3x)$，所以曲线在 $x = b/3$ 有局部极大值（local maximum），在 $(b, 0)$ 有局部极小值（local minimum）。经过 O 的直线在 O 附近切过上升的一段，再在 P 相交（当 $a < \frac{2}{3}b$ 时 P 位于 $b/3$ 与 b 之间，否则位于 $b/3$ 之前），然后在切点 $x = b$ 之后的 Q 第三次与曲线相交。图中取 $a = 1$、$b = 3$；图中亦显示了 P 处的切线、点 R 以及面积为 S 的区域。



P 处的切线

以乘积法则（product rule）求导，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (b-x)^2 - 2x(b-x) = (b-x)(b-3x).$$

在 P,$x = b-a$,所以 $b-x = a$,$b-3x = 3a-2b$。该处的斜率(gradient)为 $m = a(3a-2b)$。

切线（tangent）为 $y = mx+k$，其中 k 的取值须令直线经过 P:

$$\begin{aligned} k &= a^2(b-a) - a(3a-2b)(b-a) \\ &= a(b-a)(a-3a+2b) \\ &= 2a(b-a)^2. \end{aligned}$$

因此 P 处的切线为 $y = a(3a-2b)x + 2a(b-a)^2$,与所求相符。特别地,$R = (0,\, 2a(b-a)^2)$,位于 y 轴的正半轴上。

面积 S

记 $c = b-a > 0$ 为 P 的 x 坐标。在 $0 < x < c$ 上,

$$x(b-x)^2 - a^2x = x\,(b-x-a)(b-x+a) > 0,$$

因为三个因式在该区间上都是正数。所以在 O 与 P 之间曲线位于直线之上，而

$$S = \int_0^c (x(b-x)^2 - a^2x)\,\mathrm{d}x = \int_0^c ((b^2-a^2)x - 2bx^2 + x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{(b^2-a^2)c^2}{2} - \frac{2bc^3}{3} + \frac{c^4}{4}.$$

现代入 $b^2-a^2=c(b+a)=c(c+2a)$ 及 $b=c+a$：

$$\begin{aligned}S&=\frac{c^3(c+2a)}{2}-\frac{2c^3(c+a)}{3}+\frac{c^4}{4}\\&=c^3\Big[c(\tfrac12-\tfrac23+\tfrac14)+a(1-\tfrac23)\Big]\\&=c^3\Big(\frac{c}{12}+\frac{a}{3}\Big)=\frac{c^3(c+4a)}{12}.\end{aligned}$$

由于 $c+4a=b+3a$，上式即为

$$S=\frac{1}{12}(b-a)^3(3a+b),$$

与所求相符。

> **想一想** 为何不直接把所有东西以 a 和 b 展开?

当然可以，但目标式含有因式 $(b-a)^3$，要从一条关于 a 和 b 的四次式中把它抽出来十分费劲。改写为 $c=b-a$ 后，这个因式会自动出现，因为积分中的每一项本身已带有 c^2 或更高次。

三角形 T 与不等式

以 OR 作为三角形 OPR 的底：它位于 y 轴上，长度为 $2ac^2$。垂直高度是 P 到 y 轴的距离，即 c。所以

$$T=\tfrac12\cdot 2ac^2\cdot c=ac^3=a(b-a)^3.$$

因此，由于 $(b-a)^3>0$，

$$S-\tfrac13 T=\frac{(b-a)^3}{12}(3a+b-4a)=\frac{(b-a)^4}{12}>0,$$

因为 $b\neq a$。故 $S>\frac13 T$，与所求相符。

验算

- 取 $a=1$、$b=3$（即图中情况）：$P=(2,2)$，$Q=(4,4)$，而曲线在 $x=2$ 时给出 $y=2$，在 $x=4$ 时给出 $y=4$。切线公式给出 $y=-3x+8$；斜率公式 $(3-x)(3-3x)$ 在 $x=2$ 时等于 -3。直接积分，$S=\int_0^2(x^3-6x^2+8x)\,\mathrm{d}x=4-16+16=4$，与 $\frac{1}{12}\cdot 8\cdot 6=4$ 吻合。此外 $T=8$，而 $4>\frac83$。
- 比值 $S/(\frac13 T)=(3a+b)/(4a)$ 在 $b\to a$ 时趋向 1，所以常数 $\frac13$ 已是最佳可能的。这是合理的：对于抛物线 $y=px-qx^2$，同样的构造给出 $S=qc^3/6$ 及 $T=qc^3/2$，所以 $S=\frac13 T$ 恰好成立；而当 P 非常接近 O 时，两者之间的三次曲线几乎就是一条抛物线。
- 对数以千计随机取得的 $0<a<b$，以电脑检验交点、切线、面积（以数值积分计算）及不等式，结果均与公式一致。

常见错误

- 把 $x(b-x)^2 = a^2x$ 除以 x 而没有记下根 $x = 0$，或只取 $b - x = a$ 而遗漏了 Q。
- 以直线减曲线来积分，得出负的“面积”：积分前先确认哪个图像在上方。
- 画草图时把三次曲线画成在 $x = b$ 穿过 x 轴，而不是在该处与 x 轴相切。

STEP 之外

最后一部分中比值的极限为 1，这与阿基米德（Archimedes）的抛物线求积（quadrature of the parabola）一脉相承：对于抛物线，弓形的面积恰好是三角形 OPR 面积的三分之一；而在 O 附近，三次曲线局部上就是一条抛物线，所以不等式在极限下收紧为等式。理解局部行为为何由泰勒（Taylor）展开的头几项决定，并把“几乎是一条抛物线”说得严谨，正是大学一年级分析学（analysis）的课题。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析学》）是一本亲切易读的书，可以看到泰勒定理（Taylor's theorem）的严谨处理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。