详细解答

STEP III 2017，第 9 题

力学 · 连接质点与能量

STEP III 2017，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

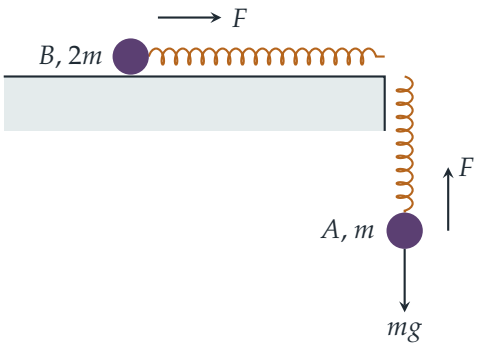
step.maths.org/questions/17-s3-q9

关键思路

弹簧的张力（tension）未知，而且随时间改变，但它以相同大小作用于两个质点上。所以，只要把两条运动方程（equations of motion）按适当比例相加，张力就会互相抵消，剩下一条可以直接积分（integrate）的关系式。在第二部分，这条积分后的关系告诉我们两个质点在时间 T 时的位置，以及它们的速率之间有何联系。接着，能量守恒（conservation of energy）给出第二条方程，两者合起来便可确定 B 的速率。

解答

我们把 A 和 B 视为质点，并把弹簧视为轻弹簧。桌面光滑，而弹簧光滑地绕过桌边。释放后，A 铅垂下落，B 则沿桌面向桌边滑动。设时间 t 时弹簧的张力为 F。当 $x < a$ 时，B 仍在桌面上。



关系式 $y + 2x = \frac{1}{2}gt^2$

对 A 取向下为 y 的正方向，对 B 取向桌边为 x 的正方向。由牛顿（Newton）第二定律（Newton's second law）：

$$\begin{aligned} \text{对}A\text{(铅垂方向)：} &\quad m\ddot{y} = mg - F, \\ \text{对}B\text{(水平方向)：} &\quad 2m\ddot{x} = F. \end{aligned}$$

（对 B 而言，重量与法向反作用力（normal reaction）互相抵消，而且没有摩擦力（friction）。）把两条方程相加便消去 F：

$$m\ddot{y} + 2m\ddot{x} = mg \quad \Longrightarrow \quad \ddot{y} + 2\ddot{x} = g.$$

两个质点都由静止开始，且 $x = y = 0$。积分一次得 $\dot{y} + 2\dot{x} = gt$，由于 $t = 0$ 时两个速度皆为零，所以没有常数项。再积分一次得

$$y + 2x = \tfrac{1}{2}gt^2,$$

同样没有常数项，这正是所求的结果。

> **想一想** 我们不知道 F，因为它取决于不断改变的伸长量（extension）$y - x$。那我们怎样仍然能得出结论？

我们根本不需要 F。只要把两条方程乘以适当的因子（这里只需直接相加），F 就会以相反的符号出现。组合 $y + 2x$ 是类似动量（momentum）的量 $my + 2mx$ 的 $1/m$ 倍，而驱动它的唯一外力就是 A 的重量。

B 在时间 T 时的速率

在时间 $T = \sqrt{6a/g}$ 时，质点 B 到达桌边，所以 $x = a$。由于 $\frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}g \cdot \frac{6a}{g} = 3a$，由第一部分得

$$y + 2a = 3a \quad \Longrightarrow \quad y = a.$$

因此在时间 T 时，弹簧的伸长量为 $y - x = a - a = 0$。弹簧再次回到自然长度（natural length），不储存任何弹性势能（elastic energy）。

设 u 和 v 分别为 B 和 A 在时间 T 时的速率。由积分一次后的关系式 $\dot{y} + 2\dot{x} = gt$，在 $t = T$ 时得

$$v + 2u = gT = \sqrt{6ag}. \tag{1}$$

能量。桌面光滑而弹簧是轻的，所以机械能（mechanical energy）守恒。开始时，两个质点都静止，弹簧未被拉伸。在时间 T 时，A 下降了距离 a，而弹簧再次处于未拉伸状态，所以失去的势能（potential energy）mga 全部转化为动能（kinetic energy）：

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(2m)u^2 = mga \quad \Longrightarrow \quad v^2 + 2u^2 = 2ga. \tag{2}$$

想一想 两条方程，其中一条是二次的：我们不是应该预期有两个可能的速率吗？

把由 (1) 得出的 $v = \sqrt{6ag} - 2u$ 代入 (2)：

$$\begin{aligned} 6ag - 4\sqrt{6ag}\,u + 4u^2 + 2u^2 &= 2ga \\ 6u^2 - 4\sqrt{6ag}\,u + 4ag &= 0 \\ 3u^2 - 2\sqrt{6ag}\,u + 2ag &= 0. \end{aligned}$$

判别式（discriminant）为 $4 \cdot 6ag - 4 \cdot 3 \cdot 2ag = 0$，所以这个二次式是完全平方（perfect square），只有一个根：

$$(\sqrt{3}\,u - \sqrt{2ag})^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \sqrt{\frac{2ag}{3}}.$$

所以 B 到达桌边时的速率为 $\sqrt{2ag/3}$，正如所求。由 (1)，$v = \sqrt{6ag} - 2\sqrt{2ag/3} = \sqrt{2ag/3}$，两者亦相同。在那一刻，两个质点以相同速率运动，这与弹簧处于自然长度的情况吻合。

验算

- 重根（repeated root）是有意义的。当总“动量” $v + 2u$ 固定时，动能 $\frac{1}{2}mv^2 + mu^2$ 在 $v = u$ 时最小，而这里的最小值恰好是 mga。所以能量方程与 (1) 只有在 $u = v$ 时才能同时成立，此时由 (1) 直接得 $3u = \sqrt{6ag}$。
- 完整求解运动（题目叫我们不要这样做）会得到 $\omega T = 2\pi$，其中 $\omega^2 = 3\lambda/(2am)$：伸长量恰好经历一次完整的振动，然后回到零。以 $a = 1.3\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 进行逐步数值积分（numerical integration），得 $x(T) = y(T) = a$，而两个速率都等于 $2.9143\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \sqrt{2ag/3}$。
- 量纲（dimensions）：$\sqrt{ag}$ 是速率，$\sqrt{a/g}$ 是时间。

常见错误

- 忘记弹簧一般而言带有弹性势能。这个论证之所以成立，只是因为在时间 T 时 $x = y = a$，使伸长量为零。必须明确证明这一点。
- 只写出能量方程，然后尝试从中解出 u。这条方程有两个未知数，所以我们还需要关系式 (1)。

STEP 之外

量 $my + 2mx$ 的表现就像动量：内力（这里是弹簧张力）在其中互相抵消，只有外力才能改变它。这是质点系力学的起点。一般而言，我们把运动分拆为质心（centre of mass）部分和相对部分，而这里的相对坐标 $y - x$ 作简谐运动（simple harmonic motion）。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）细致地发展了这些概念。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。