详细解答

STEP III 2017，第 8 题

纯数学 · 分部求和法

STEP III 2017，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s3-q8

关键思路

开首的恒等式是分部积分（integration by parts）的离散版本，即“分部求和”（summation by parts）：它把一个涉及 b 的差分的和，换成一个涉及 a 的差分的和。要把它用于三角和，我们选取 b_m，使 $b_{m+1}-b_m$ 产生我们想要的项；和差化积公式（sum-to-product formula）可把正弦或余弦之差化为单一乘积。然后选 a_m 为 1 或 m，便能令另一边变得容易处理。

解答

恒等式

$a_{n+1}b_{n+1}-a_1b_1$ 这个量可以伸缩相消（telescopes）：

$$a_{n+1}b_{n+1}-a_1b_1=\sum_{m=1}^{n}(a_{m+1}b_{m+1}-a_mb_m).$$

在每个括号内加上再减去 a_mb_{m+1}，得

$$a_{m+1}b_{m+1}-a_mb_m=a_m(b_{m+1}-b_m)+b_{m+1}(a_{m+1}-a_m).$$

对 $m=1,\dots,n$ 求和并移项，便正好得到所求的恒等式。

在各个三角部分中，我们一直假设 $\sin\frac{1}{2}x\neq 0$（即 x 不是 2π 的倍数），使 $\operatorname{cosec}\frac{1}{2}x$ 有定义。

第 (i) 部分

取 $b_m=\sin mx$，以 $A=(m+1)x$、$B=mx$ 代入和差化积公式，得

$$b_{m+1}-b_m=\sin(m+1)x-\sin mx=2\cos(m+\tfrac{1}{2})x\,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

现在对每个 m 取 $a_m = 1$，于是 $a_{m+1} - a_m = 0$，恒等式中最后的和便等于零。恒等式变成

$$2\sin\tfrac{1}{2}x \sum_{m=1}^{n} \cos(m+\tfrac{1}{2})x = b_{n+1} - b_1 = \sin(n+1)x - \sin x.$$

两边除以 $2\sin\frac{1}{2}x \neq 0$，

$$\sum_{m=1}^{n} \cos(m+\tfrac{1}{2})x = \tfrac{1}{2}(\sin(n+1)x - \sin x)\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}x,$$

此即所求。

第 (ii) 部分

因子 m 提示我们取 $a_m = m$，使 $a_{m+1} - a_m = 1$。这样我们便需要 $b_{m+1} - b_m$ 是 $\sin mx$ 的倍数。

> ? **想一想** 选取哪个 b_m，才能令 $b_{m+1} - b_m$ 成为 $\sin mx$ 的倍数?

在第 (i) 部分中，于 $(m+1)x$ 和 mx 处两个正弦之差，给出了在中点 $(m+\frac{1}{2})x$ 处的余弦。要得到 $\sin mx$，我们需要一个余弦之差，而其两个自变量的中点是 mx，所以取 $b_m = \cos(m-\frac{1}{2})x$。利用 $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$（这亦可由题目中的第一个提示推出），

$$b_{m+1} - b_m = \cos(m+\tfrac{1}{2})x - \cos(m-\tfrac{1}{2})x = -2\sin mx\,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

记 $S = \sum_{m=1}^{n} m\sin mx$。取 $a_m = m$，恒等式给出

$$-2\sin\tfrac{1}{2}x\,S = (n+1)\cos(n+\tfrac{1}{2})x - \cos\tfrac{1}{2}x - \sum_{m=1}^{n}\cos(m+\tfrac{1}{2})x.$$

最后的和正是第 (i) 部分的结果。代入后，两边乘以 $-2\sin\frac{1}{2}x$：

$$4\sin^2\tfrac{1}{2}x\,S = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x - 2(n+1)\cos(n+\tfrac{1}{2})x\,\sin\tfrac{1}{2}x + \sin(n+1)x - \sin x.$$

现在化简两个乘积：

- $2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = \sin x$，它与 $-\sin x$ 互相抵消；
- 由 $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$，取 $A = (n+\frac{1}{2})x$、$B = \frac{1}{2}x$，

$$2\cos\big(n+\tfrac{1}{2}\big)x\,\sin\tfrac{1}{2}x = \sin(n+1)x - \sin nx.$$

因此

$$\begin{aligned} 4\sin^2\tfrac{1}{2}x\,S &= -(n+1)\big(\sin(n+1)x - \sin nx\big) + \sin(n+1)x \\ &= -n\sin(n+1)x + (n+1)\sin nx. \end{aligned}$$

两边除以 $4\sin^2\frac{1}{2}x$，

$$\sum_{m=1}^{n} m\sin mx = \left(-\tfrac{n}{4}\sin(n+1)x + \tfrac{n+1}{4}\sin nx\right)\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}x,$$

所以

$$p = -\frac{n}{4}, \qquad q = \frac{n+1}{4}.$$

验算

- 当 $n = 1$ 时，利用 $1-\cos x = 2\sin^2\frac{1}{2}x$，公式给出 $\frac{1}{4}(2\sin x - \sin 2x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin x\,(1-\cos x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x = \sin x$。这正是唯一的一项 $1\cdot\sin x$。
- 数值上，取 $n = 3$ 及 $x = 1$：$\sin 1 + 2\sin 2 + 3\sin 3 \approx 3.08343$，而 $\left(-\frac{3}{4}\sin 4 + \sin 3\right)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2} \approx 3.08343$ 亦然。
- 第 (ii) 部分亦可通过把 $\sum_{m=1}^{n}\cos mx$ 对 x 求导数（differentiating）得出，结果是 $-S$；这是一个有用的独立验算。

常见错误

- 在第 (ii) 部分选取 $b_m = \cos mx$：这样差便是 $\sin(m+\frac{1}{2})x$ 的倍数，而不是 $\sin mx$ 的倍数，方法因而卡住。
- 在 $\cos A - \cos B$ 中弄错正负号：它等于 $-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$，前面有负号。
- 在除以 $\sin\frac{1}{2}x \neq 0$ 中的那个量之前，忘记先说明它不为零。

STEP 之外

分部求和（阿贝尔求和，Abel summation）是分部积分的离散孪生兄弟，也是大学一年级分析中的主力工具。配合像第 (i) 部分那样的界——它显示 $\cos(m+\frac{1}{2})x$ 的部分和（partial sums）保持有界——它可以证明狄利克雷判别法（Dirichlet's test）：例如，$\sum\frac{\sin mx}{m}$ 对每个 x 都收敛（converges）。像第 (ii) 部分那样的和亦出现于傅里叶级数（Fourier series）中，这类闭合形式正是研究收敛性的起点。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对阿贝尔求和及狄利克雷判别法有清晰的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。