详细解答

STEP III 2017，第 7 题

纯数学 · 椭圆的切线

STEP III 2017，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s3-q7

关键思路

参数（parameter）t 把“在 T 点的切线（tangent）通过 (X, Y)”这个条件化为一条关于 t 的二次方程（quadratic equation）。每一个根（root）都对应一个切点（point of contact），所以数从一点出发的切线条数，就等于数实根的个数，也就是判别式（discriminant）的问题。在第 (ii) 部分，两个切点的参数 p 和 q 正好是该二次方程的两个根，因此它们的和与积可以直接从系数读出。

解答

该点位于椭圆上

代入 T 的坐标，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}=1,$$

所以对每一个实数 t，T 都位于椭圆（ellipse）上。

第 (i) 部分

对 t 求导，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{-4at}{(1+t^2)^2},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{2b(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

与其把两者相除（在 $t=0$ 时会出问题），不如使用椭圆在 (x_0, y_0) 处的标准切线方程 $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$；它的法向量（normal）方向 $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$ 与上面的速度向量垂直，因为

$\frac{1-t^2}{a}\cdot(-4at)+\frac{2t}{b}\cdot 2b(1-t^2)=0$。因此在 T 点的切线 L 为

$$\frac{x(1-t^2)}{a(1+t^2)}+\frac{2ty}{b(1+t^2)}=1 \iff bx(1-t^2)+2aty=ab(1+t^2).$$

代入 $(x,y)=(X,Y)$，并按 t 的幂次整理：

$$bX-bXt^2+2aYt-ab-abt^2=0 \iff (a+X)bt^2-2aYt+b(a-X)=0,$$

即为所求。

*两条切线。*反过来看：参数为 t 的点处的切线通过 (X,Y)，当且仅当 t 满足这条方程。由于 $X\neq -a$ 且 $b\neq 0$，t^2 的系数不为零，所以这确实是一条二次方程，其判别式为

$$4a^2Y^2-4b^2(a+X)(a-X)=4(a^2Y^2-(a^2-X^2)b^2).$$

若 $a^2Y^2>(a^2-X^2)b^2$，判别式为正，所以有两个相异实根 $t_1\neq t_2$。不同的 t 值给出椭圆上不同的点（映射 $t\mapsto T$ 是一一对应的（one-to-one）；令 $t=\tan\frac{\theta}{2}$，它就是熟悉的 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$，其中 $-\pi<\theta<\pi$）。不同的切点给出不同的切线，因为椭圆的切线只在其切点与椭圆相交。所以通过 (X,Y) 有两条不同的切线。

想一想 会不会遗漏了一条参数 t 取不到的切线?

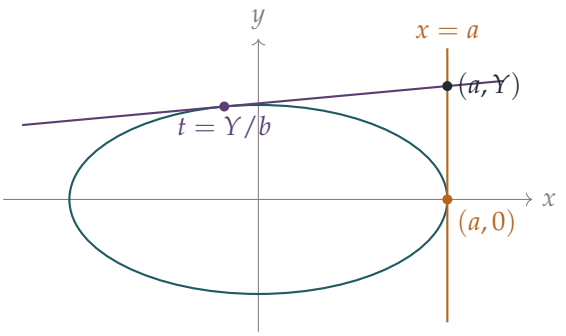
椭圆上唯一不能写成 $(*)$ 形式的点是 $(-a,0)$（即 $t\to\infty$ 时的极限），其切线为 $x=-a$。这条直线只在 $X=-a$ 时才通过 (X,Y)，而这情况已被排除。所以该二次方程涵盖了所有通过 (X,Y) 的切线。

*几何意义。*把条件除以 $a^2b^2>0$，得

$$\frac{Y^2}{b^2}>1-\frac{X^2}{a^2} \iff \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}>1,$$

即 (X,Y) 位于椭圆之外。所以与圆的情况一样，从椭圆外任何一点都可以作两条切线。

*$X^2=a^2$ 的情况。*此时条件变为 $a^2Y^2>0$，即 $Y\neq 0$：该点位于其中一条铅垂线 $x=\pm a$ 上，但不在顶点（vertex）$(\pm a,0)$。其中一条切线就是铅垂线 $x=\pm a$ 本身，它在 $(\pm a,0)$ 与椭圆相切。另一条则在别处与椭圆相切：当 $X=a$ 时，二次方程变为 $2abt^2-2aYt=0$，其根为 $t=0$（铅垂切线）及 $t=Y/b\neq 0$；当 $X=-a$ 时，它变为 $-2aYt+2ab=0$，得 $t=b/Y$，而第二条切线是 $x=-a$，即在缺失的点 $(-a,0)$ 处的切线。下图展示 $X=a$、$Y>0$ 的情况。



所以当 $X^2 = a^2$ 时结果仍然成立：只要 $Y \neq 0$，即该点位于椭圆之外，通过 (X, Y) 就有两条不同的切线。

第 (ii) 部分

在 P 点的切线通过 (X, Y)，所以由第 (i) 部分，p 是

$$(a + X)bt^2 - 2aYt + b(a - X) = 0,$$

的一个根，q 亦然。由于 $X \neq -a$，这是一条二次方程，而且 $p \neq q$（因为 $P \neq Q$），所以 p 和 q 就是它的两个根。因此

$$pq = \frac{b(a - X)}{b(a + X)} = \frac{a - X}{a + X} \quad \Longrightarrow \quad (a + X)pq = a - X,$$

即为所求，而且

$$p + q = \frac{2aY}{b(a + X)}.$$

最后部分

在切线 $bx(1 - t^2) + 2aty = ab(1 + t^2)$ 中令 $x = 0$，得 $2aty = ab(1 + t^2)$。两条切线确实与 y 轴相交，所以 $p, q \neq 0$（在 $t = 0$ 时切线为 $x = a$），并且

$$y_1 = \frac{b(1 + p^2)}{2p}, \qquad y_2 = \frac{b(1 + q^2)}{2q}.$$

写成 $\frac{1+p^2}{p} = p + \frac{1}{p}$，

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{2}\left(p + q + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{b}{2}(p + q)\left(1 + \frac{1}{pq}\right) = \frac{b(p + q)(1 + pq)}{2pq}.$$

由上面的结果，$1 + pq = \dfrac{2a}{a + X}$，所以利用 $pq = \dfrac{a - X}{a + X} \neq 0$，

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{2aY}{b(a + X)} \cdot \frac{2a}{a + X} \cdot \frac{a + X}{a - X} = \frac{2a^2Y}{(a + X)(a - X)} = \frac{2a^2Y}{a^2 - X^2}.$$

令它等于 $2b$，并乘以 $(a^2 - X^2)/(2a^2b)$（由于 $X^2 \neq a^2$，它不为零）：

$$\frac{Y}{b} = \frac{a^2 - X^2}{a^2} = 1 - \frac{X^2}{a^2} \iff \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y}{b} = 1,$$

即为所求。所以交点位于一条通过 $(\pm a, 0)$ 和 $(0, b)$ 的抛物线（parabola）上。

验算

- 取 $a = 2$、$b = 1$ 及 $(X, Y) = (4, 1)$（在椭圆外，因为 $4 + 1 > 1$），二次方程为 $6t^2 - 4t - 2 = 0$，其根为 $t = 1$ 及 $t = -\frac{1}{3}$：分别对应在 $(0, 1)$ 和 $(1.6, -0.6)$ 的切线。这两条切线 $y = 1$ 和 $2x - 3y = 5$ 都确实通过 $(4, 1)$。此时 $pq = -\frac{1}{3} = \frac{2-4}{2+4}$，$p + q = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$，与公式的预测一致。
- 在中心 $(0, 0)$，判别式为 $-4a^2b^2 < 0$：没有切线，正如从椭圆内部出发所预期的。
- 用电脑检验了大量随机的椭圆及点对 P、Q，直接求两条切线的交点；pq、$p + q$ 和 $y_1 + y_2$ 的公式全部吻合，而且当 $y_1 + y_2 = 2b$ 时，交点满足 $X^2/a^2 + Y/b = 1$。

常见错误

- 用 $\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$ 求斜率（gradient），却忘记它在 $t = 0$ 时失效，因为那里的切线是铅垂的。
- 在 $X = -a$ 时仍把 $(a + X)bt^2 - 2aYt + b(a - X) = 0$ 当作二次方程；这正是 $X^2 = a^2$ 的情况需要另行处理的原因。
- 只写到“判别式为正”便停下，而没有说明为何两个根会给出两条不同的直线。

STEP 之外

圆锥曲线（conic）的有理参数化（rational parametrisation）$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ 是代数几何（algebraic geometry）的起点：正因如此，每条拥有一个有理点的圆锥曲线都有无穷多个有理点，而它亦是毕氏三元组（Pythagorean triples）分类的基础。从外点作的一对切线引出极线（polar）的概念，并通往射影几何（projective geometry）；在射影几何中，$t = \infty$ 处那个令人烦恼的缺失点变成一个普通的点。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶题》）收录了更多这类题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。