详细解答

STEP III 2017，第 6 题

纯数学 · 代换积分法

STEP III 2017，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

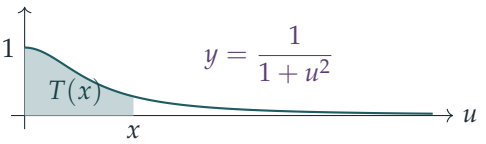
step.maths.org/questions/17-s3-q6

本题在 *Beyond STEP* 第 4.2 节由一个积分建立三角学中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/trig-from-integral.html

关键思路

我们只凭积分就要建立反正切函数（inverse tangent），所以每一个性质都必须由代换（substitution）得出。代换 $u \mapsto 1/u$ 把区间 $(0, x)$ 与 $(1/x, \infty)$ 互换；而默比乌斯（Möbius）代换 $v = \frac{u+a}{1-au}$ 使连同微分在内的被积函数（integrand）$\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ 保持不变，因此它只是平移了积分上下限。在最后一部分适当选取数值，使平移后的上下限落回一个已知的值，便得到一条可以解出的方程。

解答



$T(x)$ 是阴影部分的面积；T_∞ 是 $u \geq 0$ 时曲线下方的全部面积。

第 (i) 部分

在 $T(x)$ 的积分中代入 $u = 1/t$，于是 $\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$；当 u 由 0 变到 x 时，t 由 ∞ 下降到 $1/x$。于是

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_{\infty}^{1/x} \frac{1}{1+t^{-2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = T_\infty - T(x^{-1}). \end{aligned}$$

（由于 T_∞ 是有限值，从 0 开始的积分是确实存在的积分（proper integral），所以把积分区间拆开是合理的。）这正是所求的结果。

第 (ii) 部分

导数。由商法则（quotient rule），当 $u \neq a^{-1}$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2}.$$

另一方面，

$$1+v^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2u^2+u^2+a^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

除以 $1+u^2$，得 $\dfrac{1+v^2}{1+u^2} = \dfrac{1+a^2}{(1-au)^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$，正如所求。

加法公式（addition formula）。取 $a > 0$ 及 $0 < x < \frac{1}{a}$。当 $0 \le u \le x$ 时，$1-au \ge 1-ax > 0$，所以 v 在整个区间上有定义且连续，并且 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} > 0$，因此 v 由 $v(0) = a$ 递增至 $v(x) = \frac{x+a}{1-ax}$。

> **想一想** 为甚么 $x < \frac{1}{a}$ 这个条件重要?

若 x 达到 $\frac{1}{a}$，v 便会在积分区间内趋于无穷大，代换就失去意义。在 $x < \frac{1}{a}$ 的情况下，它是 $[0, x]$ 上一个光滑而递增的变量代换。

导数的结果正好表示 $\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{1}{1+v^2}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$，因此

$$\begin{aligned} T(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} &= \int_a^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} \\ &= \int_0^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} - \int_0^a \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a). \end{aligned}$$

这里 T 的两个自变量都是正数，所以一切都有定义。

第一个推论。记 $X = \frac{x+a}{1-ax}$。先后对 x 和 a 应用第 (i) 部分，

$$T(x^{-1}) = T_\infty - T(x) = T_\infty - T(X) + T(a) = T_\infty - T(X) + T_\infty - T(a^{-1}),$$

即 $T(x^{-1}) = 2T_\infty - T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a^{-1})$。

第二个推论。已知 $b > 0$ 及 $y > \frac{1}{b}$，设 $x = \frac{1}{y}$、$a = \frac{1}{b}$。于是 $x > 0$、$a > 0$，而 $y > \frac{1}{b}$ 等价于 $x < b = \frac{1}{a}$，所以上一个结果适用。分子分母同乘以 by，

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{b}}{1 - \frac{1}{by}} = \frac{b+y}{by-1},$$

又 $x^{-1} = y$、$a^{-1} = b$，所以

$$T(y) = 2T_\infty - T\left(\frac{y+b}{by-1}\right) - T(b).$$

第 (iii) 部分

$T(\sqrt{3})$。在最后一个结果中取 $y = b = \sqrt{3}$；由于 $\sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{3}}$，条件 $y > \frac{1}{b}$ 成立。此时

$$\frac{y+b}{by-1} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3},$$

所以 $T(\sqrt{3}) = 2T_\infty - T(\sqrt{3}) - T(\sqrt{3})$，即 $3T(\sqrt{3}) = 2T_\infty$，故

$$T(\sqrt{3}) = \tfrac{2}{3}T_\infty.$$

先求 $T(1)$。在第 (i) 部分取 $x = 1$，得 $T(1) = T_\infty - T(1)$，所以 $T(1) = \frac{1}{2}T_\infty$。

> **想一想** 当 $x = a$ 时，a 取甚么值才能使 $\frac{x+a}{1-ax}$ 等于 1?

我们需要 $\frac{2a}{1-a^2} = 1$，即 $a^2 + 2a - 1 = 0$，其正根为 $a = \sqrt{2} - 1$。

$T(\sqrt{2}-1)$。于是在加法公式中取 $x = a = \sqrt{2} - 1 > 0$。条件 $x < \frac{1}{a}$ 即 $\sqrt{2} - 1 < \sqrt{2} + 1$，显然成立。由于 $a^2 = 3 - 2\sqrt{2}$，

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(3-2\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} = 1,$$

所以 $T(\sqrt{2}-1) = T(1) - T(\sqrt{2}-1)$，得

$$T(\sqrt{2}-1) = \tfrac{1}{2}T(1) = \tfrac{1}{4}T_\infty.$$

验算

当然，T 其实就是 arctan，而 $T_\infty = \frac{\pi}{2}$；题目不准我们使用这些事实，但我们大可以用它们来核对：$\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$。用数值方法（辛普森法则（Simpson's rule））计算这些积分，得 $T_\infty \approx 1.570796$、$T(\sqrt{3}) \approx 1.047198$ 及 $T(\sqrt{2}-1) \approx 0.392699$，与 $\frac{2}{3}T_\infty$ 和 $\frac{1}{4}T_\infty$ 吻合。第 (ii) 部分的加法公式其实就是大家熟悉的 $\tan(A+B)$ 公式换了个样子，其中 $x = \tan A$、$a = \tan B$。

常见错误

- 代入 $u = 1/t$ 后忘记把上下限对调：正是 $\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ 中的负号把 $\int_{\infty}^{1/x}$ 变成 $\int_{1/x}^{\infty}$。
- 在第 (iii) 部分暗中使用 $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 或 arctan 的性质：题目禁止这样做，重点在于一切都要由第 (i) 和第 (ii) 部分推出。
- 没有就所用的具体数值检查条件 $x < \frac{1}{a}$ 和 $y > \frac{1}{b}$。

STEP 之外

用积分定义一个函数，再从定义推导出它的全部性质，正是分析（analysis）课程严格建立 ln、exp、arctan 甚至 π 的方法：在这里，π 可以直接定义为 $2T_{\infty}$。代换 $v = \frac{u+a}{1-au}$ 是一个默比乌斯变换（Möbius transformation），而它保持 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ 不变这一事实，反映了圆的旋转。分析方面可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；默比乌斯映射的几何方面，可参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。