详细解答

STEP III 2017，第 5 题

纯数学 · 极坐标曲线

STEP III 2017，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s3-q5

关键思路

以 θ 为参数，把曲线写成参数式（parametric form）：$x = f(\theta)\cos\theta$，$y = f(\theta)\sin\theta$。这样斜率（gradient）便可由连锁法则（chain rule）求得，而“以直角相交”就变成“两斜率之积为 -1”。在最后一部分，曲线族 $r = a(1+\sin\theta)$ 经过 C 上的每一点，所以直角条件沿整条 C 都成立。于是条件便化为关于 f 的一阶微分方程（first-order differential equation）。

解答

斜率

在曲线上，$x = f(\theta)\cos\theta$ 及 $y = f(\theta)\sin\theta$。用乘积法则（product rule）对 θ 求导，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

由连锁法则，再把分子和分母同除以 $\cos\theta$（假设 $\cos\theta \neq 0$），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} = \frac{f'(\theta)\tan\theta + f(\theta)}{f'(\theta) - f(\theta)\tan\theta}.$$

以直角相交的曲线

在交点处，两条曲线对应同一个 θ。设 $t = \tan\theta$，并以 f, f', g, g' 表示该处的值。若两条切线（tangent）都不是铅垂的，则两曲线垂直（perpendicular）当且仅当两斜率之积为 -1：

$$(f't + f)(g't + g) = -(f' - ft)(g' - gt).$$

把两边展开，含 $f'gt$ 和 $fg't$ 的项互相抵消，剩下

$$f'g't^2 + fg + f'g' + fgt^2 = 0 \iff (1+t^2)(f'g' + fg) = 0.$$

由于 $1 + t^2 = \sec^2\theta > 0$，得 $f'(\theta)g'(\theta) + f(\theta)g(\theta) = 0$，此即所求。

> **想一想** 若其中一条切线是铅垂的，或 $\cos\theta = 0$，以致斜率或 $\tan\theta$ 不存在，又会怎样?

改用方向向量（direction vector）代替斜率。$r = f(\theta)$ 的切线方向为 $(f'\cos\theta - f\sin\theta,\ f'\sin\theta + f\cos\theta)$，$g$ 的情况亦同理。两者的纯量积（scalar product）为

$$(f'\cos\theta - f\sin\theta)(g'\cos\theta - g\sin\theta) + (f'\sin\theta + f\cos\theta)(g'\sin\theta + g\cos\theta) = f'g' + fg,$$

因为交叉项互相抵消，且 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。所以在任何情况下，垂直的条件都是同一个。

求 $f(\theta)$

对于 $r = a(1+\sin\theta)$，有 $g'(\theta) = a\cos\theta$。

> **想一想** 这个条件只在两曲线相交之处成立。为何我们可以在 C 的每一点上使用它?

任取 C 上一点，其角度为 θ，且 $f(\theta) > 0$、$\sin\theta \neq -1$。取 $a = f(\theta)/(1+\sin\theta) > 0$，便得到曲线族中一条在同一 θ 经过该点的曲线。依题设，这条曲线与 C 以直角相交，因此

$$f'(\theta)\, a\cos\theta + f(\theta)\, a(1+\sin\theta) = 0.$$

除以 $a > 0$，每个这样的 θ 都满足

$$f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)(1+\sin\theta) = 0.$$

乘以 $1-\sin\theta$，并利用 $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$:

$$\cos\theta\,[f'(\theta)(1-\sin\theta) + f(\theta)\cos\theta] = 0.$$

在 $\cos\theta \neq 0$ 之处，括号内的式子为零。由商法则（quotient rule），括号内的式子等于 $(1-\sin\theta)^2$ 乘以 $f(\theta)/(1-\sin\theta)$ 的导数:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{f(\theta)}{1-\sin\theta}\right) = \frac{f'(\theta)(1-\sin\theta) + f(\theta)\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2} = 0.$$

所以在区间 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 上，$f(\theta) = k(1-\sin\theta)$，其中 k 为常数。（等价地，我们也可以对 $f'/f = -(1+\sin\theta)/\cos\theta = -\cos\theta/(1-\sin\theta)$ 分离变量（separation of

variables)。）曲线经过 $r=4$、$\theta=-\frac{1}{2}\pi$，故由连续性（continuity）得 $k(1+1)=4$，即 $k=2$。在 $\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ 上，同样的论证亦适用，而 $\theta=\frac{3}{2}\pi$ 与 $-\frac{1}{2}\pi$ 是同一方向，所以同样有 $k=2$。因此

$$\boxed{f(\theta)=2(1-\sin\theta)}$$

这是另一条心形线（cardioid），即 $r=2(1+\sin\theta)$ 关于 x 轴的反射。

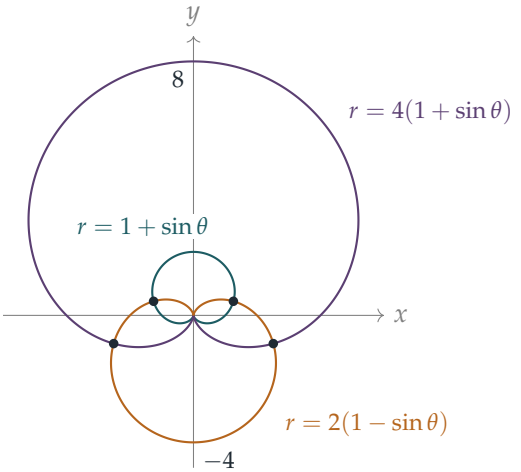
草图

曲线 $r=a(1+\sin\theta)$ 是一条尖点（cusp）在原点、关于 y 轴对称的心形线。它向上伸至 $(0,2a)$，并在 $(\pm a,0)$ 与 x 轴相交。曲线 $r=2(1-\sin\theta)$ 是形状相同但开口向下的心形线：其尖点在原点，在 $(\pm2,0)$ 与 x 轴相交，并向下伸至 $(0,-4)$。

交点可由解 $a(1+\sin\theta)=2(1-\sin\theta)$ 得出，结果为 $\sin\theta=\frac{2-a}{2+a}$：

- $a=1$：$\sin\theta=\frac{1}{3}$，$r=\frac{4}{3}$，交点为 $\left(\pm\frac{8\sqrt{2}}{9},\frac{4}{9}\right)$；
- $a=4$：$\sin\theta=-\frac{1}{3}$，$r=\frac{8}{3}$，交点为 $\left(\pm\frac{16\sqrt{2}}{9},-\frac{8}{9}\right)$。

三条曲线亦全都经过原点。



验算

- 在 $\theta=0$ 时，曲线 $r=2(1-\sin\theta)$ 位于 $(2,0)$，而 $r=2(1+\sin\theta)$ 亦经过同一点。该处 $f=2$、$f'=-2$、$g=2$、$g'=2$，所以 $f'g'+fg=-4+4=0$，与预期相符。
- 在 $\theta=-\frac{1}{2}\pi$ 时，$f=2(1+1)=4$，符合要求。
- 已用电脑确认在 $\left(\frac{8\sqrt{2}}{9},\frac{4}{9}\right)\approx(1.257,0.444)$ 的两条切线互相垂直；对许多随机取的 a 值，切线亦同样经确认为垂直。

常见错误

- 只在一个交点使用直角条件。“对每个正数 a”的用意，正是要令条件在 C 的每一点都成立。
- 忘记 $f(\theta)/(1-\sin\theta)$ 在 $\theta=\frac{1}{2}\pi$ 没有定义，因而在决定常数时不够谨慎。
- 把 $r=2(1-\sin\theta)$ 画成开口向上：由于在 $\theta=-\frac{1}{2}\pi$ 时 $r=4$，这条曲线主要位于 x 轴下方。

STEP 之外

若一族曲线与另一族曲线处处以直角相交，这两族曲线便称为一对正交轨线（orthogonal trajectories）。这里的心形线 $r=a(1+\sin\theta)$ 与 $r=b(1-\sin\theta)$ 就构成这样的一对。这个概念出现在大学一年级的微分方程课程中，亦在物理学里再次出现：场线（field lines）与等势线（equipotentials）以直角相交。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）讲解了如何求正交轨线。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）则展示了共形映射（conformal map）如何产生这类曲线族。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。