详细解答

STEP III 2017，第 4 题

纯数学 · 函数的几何平均

> **STEP III 2017，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q4

关键思路

几何平均（geometric mean）其实就是普通平均值的指数：$\ln F(y)$ 是 $\ln f$ 在 $[0,y]$ 上的平均值。因此 F 的每一个性质，都来自对数的某个性质（换底公式（change of base）、$\ln(fg)=\ln f+\ln g$),再配合积分的线性(linearity)。至于第 (iv) 部分的逆命题(converse),条件会变成一条含积分的方程，对它求导后，便化为一条简单的微分方程（differential equation）。

解答

全文中记

$$\ln F(y)=\frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (y>0),$$

这就是把定义两边取对数后的形式。

第 (i) 部分

由于 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$\log_a$ 有定义，而且 $\ln a\neq 0$；由换底公式得 $\log_a f(x)=\dfrac{\ln f(x)}{\ln a}$。此外，对任何实数 t，都有 $a^t=\mathrm{e}^{t\ln a}$。因此

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{y}\int_0^y \log_a f(x)\,\mathrm{d}x} &= \exp\left(\ln a\cdot\frac{1}{y}\int_0^y \frac{\ln f(x)}{\ln a}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right)=F(y), \end{aligned}$$

其中我们把常数 $\frac{1}{\ln a}$ 提到积分号外，再与 $\ln a$ 约去。这就是所求的结果。（条件 $a\neq 1$ 正是容许我们除以 $\ln a$ 的原因。）

第 (ii) 部分

由于 $f(x) > 0$ 且 $g(x) > 0$，故 $h(x) > 0$，所以 H 有定义，且 $\ln h(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$。由积分的线性，

$$\ln H(y) = \frac{1}{y}\int_0^y (\ln f(x) + \ln g(x))\,\mathrm{d}x = \ln F(y) + \ln G(y) = \ln(F(y)G(y)).$$

由于 ln 是一一对应的（one-to-one），故 $H(y) = F(y)G(y)$。

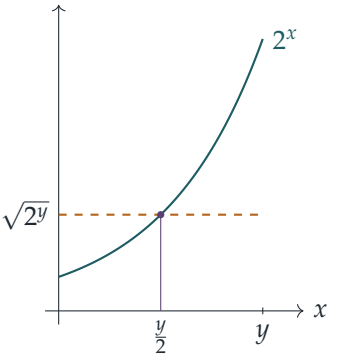
第 (iii) 部分

这里 $f(x) = b^x > 0$，且 $\ln f(x) = x \ln b$，所以

$$\ln F(y) = \frac{1}{y}\int_0^y x \ln b\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\cdot\frac{y^2}{2}\ln b = \frac{y}{2}\ln b.$$

因此 $F(y) = \mathrm{e}^{\frac{y}{2}\ln b} = b^{y/2} = \sqrt{b^y}$，即为所求。

下图展示 $b = 2$ 时这个结果的意思：2^x 在 $[0, y]$ 上的几何平均，等于 2^x 在中点 $\frac{y}{2}$ 的值，因为 $\ln 2^x$ 是线性的，而线性函数的平均值就是它在中点的值。



第 (iv) 部分

正如题目隐含地假设的一样，我们假设 f 是连续（continuous）的，使各积分存在，并可使用微积分基本定理（fundamental theorem of calculus）。设 $\phi(x) = \ln f(x)$；由于 $f(x) > 0$，它有定义，而且是连续的。取对数后，假设 $F(y) = \sqrt{f(y)}$ 表示

$$\frac{1}{y}\int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\phi(y) \quad \text{即} \quad \int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{y}{2}\phi(y) \qquad \text{对所有} y > 0. \qquad (*)$$

? **想一想** 怎样才能消去积分？我们又是否可以这样做？

对 y 求导。由微积分基本定理，$(*)$ 的左方是可微（differentiable）的，其导数为 $\phi(y)$。所以右方也可微，因此当 $y>0$ 时，$\phi(y)=\frac{2}{y}\times$（左方）也可微。对 $(*)$ 求导，右方使用乘积法则（product rule）：

$$\phi(y)=\tfrac{1}{2}\phi(y)+\tfrac{y}{2}\phi'(y) \quad\Longrightarrow\quad y\,\phi'(y)-\phi(y)=0.$$

由于 $y>0$，我们可以除以 y^2，并认出这是由商法则（quotient rule）得出的导数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\phi(y)}{y}\right)=\frac{y\phi'(y)-\phi(y)}{y^2}=0.$$

所以 $\phi(y)/y$ 在区间 $y>0$ 上是常数，设为 k（由均值定理（mean value theorem），在一个区间上导数为零的函数是常数）。因此 $\ln f(x)=kx$，且

$$f(x)=\mathrm{e}^{kx}=b^x, \qquad \text{其中}b=\mathrm{e}^k>0.$$

这对每个 $x>0$ 都成立；单一点 $x=0$ 的值不影响任何积分，而且由连续性，无论如何都有 $f(0)=1=b^0$。结合第 (iii) 部分，这说明几何平均等于 $\sqrt{f(y)}$ 的函数，恰好就是函数 b^x。

验算

- 在第 (iii) 部分取 $b=4$、$y=2$：$\ln F(2)=\frac{1}{2}\int_0^2 x\ln 4\,\mathrm{d}x=\ln 4$，所以 $F(2)=4=\sqrt{4^2}$；数值积分的结果与此吻合。
- 在第 (iv) 部分，试一个不是 b^x 形式的函数，例如 $f(x)=3\cdot 2^x$。由第 (ii) 及 (iii) 部分，$F(y)=3\cdot 2^{y/2}$，而 $\sqrt{f(y)}=\sqrt{3}\cdot 2^{y/2}$，所以条件不成立，理应如此。我们的论证会得出 $\phi(y)/y=\ln 2+\frac{\ln 3}{y}$，它并非常数。
- 第 (i) 及 (ii) 部分已用电脑对随机的正函数、y 值，以及大于和小于 1 的底 a 作验证。

常见错误

- 在第 (iv) 部分对 $(*)$ 求导时，忘记对 $\frac{y}{2}\phi(y)$ 使用乘积法则，结果完全丢失了 ϕ' 项。
- 单凭第 (iii) 部分便断定 $f(x)=b^x$：第 (iii) 部分只说明 b^x 具有这个性质，并没有说明其他函数都没有。第 (iv) 部分是逆命题，需要独立的论证。
- 在第 (i) 部分没有指出哪里需要 $a\neq 1$：正是这个条件使 $\log_a$ 有意义，并使 $\ln a\neq 0$。

STEP 之外

连续几何平均是 $(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}$ 的积分版本；对凹函数（concave function）ln 应用琴生不等式（Jensen's inequality），可证明它永远不会超过普通平均值 $\frac{1}{y}\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x$，这就是

连续版本的算术–几何平均不等式（AM–GM inequality）。第 (iv) 部分是一个小例子，展示如何把函数方程（functional equation）化为微分方程来求解，而这需要小心处理可微性；在分析课程中，你会学到微积分基本定理究竟在甚么情况下容许这样做。如需严谨的理论背景，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。