详细解答

STEP III 2017，第 3 题

纯数学 · 多项式的根

> **STEP III 2017，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q3

本题在 *Beyond STEP* 第 6.4 节解四次方程中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/quartic.html

关键思路

任何多项式的系数都是其根的对称函数（symmetric functions），所以三次方程的系数 A 是其三个根之和的相反数，而这个和正是 α、β、γ、δ 的一个熟悉的对称函数。对于题中指定的四次方程，其对应的三次方程有一个整数根，因此可以完全因式分解。知道 $\alpha\beta+\gamma\delta$ 的值后，便可把四次方程拆成两个二次因式，一个以 α、β 为根，另一个以 γ、δ 为根，而其余的系数则确定这两个因式。

解答

求 A

全程我们使用四次方程的韦达定理（Vieta's relations）：

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p, \qquad \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=q,$$
$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-r, \qquad \alpha\beta\gamma\delta=s.$$

该三次方程是首一（monic）的，其根为 $y_1=\alpha\beta+\gamma\delta$、$y_2=\alpha\gamma+\beta\delta$ 及 $y_3=\alpha\delta+\beta\gamma$，所以

$$y^3+Ay^2+\cdots=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3),$$

比较 y^2 的系数，得 $A = -(y_1 + y_2 + y_3)$。但 $y_1 + y_2 + y_3$ 恰好包含六个由两个不同根组成的乘积各一次，所以它等于 q。因此

$$A = -q.$$

第 (i) 部分

当 $p = 0$、$q = 3$、$r = -6$、$s = 10$ 时，三次方程的系数为

$$A = -3, \qquad pr - 4s = -40, \qquad 4qs - p^2 s - r^2 = 120 - 0 - 36 = 84,$$

所以方程为

$$y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = 0.$$

任何整数根都必整除 84。试代入较小的因数，$y = 2$ 给出 $8 - 12 - 80 + 84 = 0$，所以 $y - 2$ 是一个因式：

$$y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = (y - 2)(y^2 - y - 42) = (y - 2)(y - 7)(y + 6).$$

各根为 2、7 及 -6；最大的是 7，所以

$$\alpha\beta + \gamma\delta = 7.$$

第 (ii) 部分

展开得

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta,$$

即全部六个两两乘积之和减去 $\alpha\beta$ 与 $\gamma\delta$。所以

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = q - (\alpha\beta + \gamma\delta) = 3 - 7 = -4.$$

接着，$\alpha\beta$ 与 $\gamma\delta$ 之和为 7，积为 $\alpha\beta\gamma\delta = s = 10$。因此它们是以下方程的根：

$$t^2 - 7t + 10 = (t - 5)(t - 2) = 0,$$

又因为 $\alpha\beta > \gamma\delta$，所以 $\alpha\beta = 5$ 及 $\gamma\delta = 2$。

第 (iii) 部分

设 $u = \alpha + \beta$。由于 $p = 0$，四个根之和为零，所以 $\gamma + \delta = -u$，而第 (ii) 部分给出 $-u^2 = -4$，所以 $u = \pm 2$。

? **想一想** u 应取哪个符号？我们怎样判断？

我们还未用到 r。把四个三元乘积两两分组，

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = \alpha\beta(\gamma+\delta) + \gamma\delta(\alpha+\beta) = 5(-u) + 2u = -3u.$$

这等于 $-r = 6$，所以 $u = -2$。（取另一个符号会得到 $r = +6$，即另一个四次方程。）因此

$$\alpha + \beta = -2, \quad \alpha\beta = 5, \qquad \gamma + \delta = 2, \quad \gamma\delta = 2.$$

所以 α、β 是 $x^2 + 2x + 5 = 0$ 的根，得 $x = -1 \pm 2\mathrm{i}$；而 γ、δ 是 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 的根，得 $x = 1 \pm \mathrm{i}$。因此四次方程

$$x^4 + 3x^2 - 6x + 10 = (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

的根为

$$x = -1 + 2\mathrm{i}, \quad -1 - 2\mathrm{i}, \quad 1 + \mathrm{i}, \quad 1 - \mathrm{i}.$$

验算

- 展开 $(x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 2)$：$x^3$ 项互相抵消，得到 $x^4 + 3x^2 - 6x + 10$，正是原来的四次式。
- 以这些根计算，$\alpha\gamma + \beta\delta$ 及 $\alpha\delta + \beta\gamma$（按某个次序）应为三次方程的另外两个根 2 及 -6。它们之和为 $q - 7 = -4 = 2 + (-6)$，与预期相符。
- 公式 $A = -q$ 亦已用电脑在一千个根为随机复数的四次方程上验证过。

常见错误

- 误取 $A = q$：y^2 的系数是各根之和的相反数。
- 停在 $u = \pm 2$ 并同时给出两个可能：只有一个符号与 $r = -6$ 相容。
- 预期有实根：这个四次式对所有实数 x 都是正数，所以四个根全是复数。

STEP 之外

这里的三次方程是该四次方程的预解三次方程（resolvent cubic），也是费拉里（Ferrari）方法的核心：解任何四次方程都可化为解一个三次方程，再解若干二次方程。这方法为何奏效，可由伽罗瓦理论（Galois theory）解释；该理论研究根的置换（permutations）如何作用于像 $\alpha\beta + \gamma\delta$ 这样的式子（三个式子各自被 24 个置换中一个含八个置换的子群（subgroup）固定）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）是入门这些概念的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。