详细解答

STEP III 2017，第 2 题

纯数学 · 复平面上的旋转

> **STEP III 2017，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q2

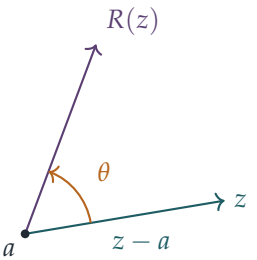
关键思路

要描述绕 a 的旋转（rotation），最简单的做法是把原点移到 a：先减去 a，再乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，然后把 a 加回去。因此每个旋转都具有 $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z + k$ 的形式；反过来，只要 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq 1$，这样的映射就是绕其不动点（fixed point）转 α 的旋转。所以要辨认 SR，只需把两条公式复合（compose），再求出不动点。利用半角因式分解（half-angle factorisation）$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\frac{1}{2}\alpha$，便可把答案化成所要求的形式。

解答

第 (i) 部分

由中心 a 指向 P 的向量（vector）是 $z - a$。绕 a 逆时针旋转 θ，就是把这个向量转 θ，在复数中即乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$；由于 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$，长度保持不变。



所以 P 的像 w 满足 $w - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - a)$，即

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + a(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}),$$

正如所求。同理，$S(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}z + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})$。

第 (ii) 部分

先作用 R，再作用 S：

$$\begin{aligned} SR(z) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + a(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\Big) + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}). \end{aligned}$$

由第 (i) 部分，绕 c 转 $\theta + \phi$ 的旋转是 $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + c(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)})$。两者 z 的系数已经相同，所以 SR 恰好是这个旋转，当且仅当

$$c(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}). \qquad (*)$$

? **想一想** 怎样才能把括号 $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 化成半角的正弦?

提取因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}$，使括号内变得对称：

$$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}) = -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

分别取 $\alpha = \theta + \phi$、θ 和 ϕ 代入，方程 $(*)$ 变成

$$-2\mathrm{i}\,c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi) = -2\mathrm{i}\,a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\mathrm{i}\,b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

两边除以 $-2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}$（它永不为零），得

$$c\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta + b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

若 $\theta + \phi \neq 2n\pi$，则 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) \neq 0$，因此上式唯一确定 c，而取这个 c 时，映射 SR 就是绕 c 转 $\theta + \phi$ 的旋转。这正是所要求的结果。(这个条件是必要的：若 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) = 0$，一般而言根本没有可供旋转的不动点。)

$\theta + \phi = 2\pi$ 的情况。此时 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} = 1$ 且 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$，所以

$$\begin{aligned} SR(z) &= z + a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \\ &= z + a(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - 1) + b(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \\ &= z + (b - a)(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}). \end{aligned}$$

所以 SR 是平移（*translation*）$(b-a)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$，平移距离为 $2|b-a|\,|\sin\frac{1}{2}\theta|$。当 $a = b$ (绕同一点先转 θ 再转 $2\pi - \theta$)，或当 θ 是 2π 的倍数时，它是恒等映射（identity)；否则它是一个真正的平移，没有不动点。

第 (iii) 部分

在 SR 的公式中把 (a,θ) 与 (b,ϕ) 的角色互换，得

$$RS(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) + a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

两个映射都把 z 乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}$，所以 $RS = SR$ 当且仅当常数项相同。两者之差为

$$\begin{aligned} SR(z) - RS(z) &= a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-1) + b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \\ &= (b-a)(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}). \end{aligned}$$

乘积为零当且仅当其中一个因子为零，所以 $RS = SR$ 当且仅当

- $a = b$（两个旋转的中心相同），或
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$，即 θ 是 2π 的倍数，所以 R 是恒等映射，或
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = 1$，即 ϕ 是 2π 的倍数，所以 S 是恒等映射。

换句话说：两个真正的旋转只有在中心相同时才可交换（commute）。

验算

- 取 $a = b$，(ii) 的公式给出 $c\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) = a\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\frac{1}{2}\theta + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\frac{1}{2}\phi\right)$，把括号展开得 $\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\phi + \cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\phi = \sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$（虚部互相抵消），所以 $c = a$，理应如此。
- 取 $\phi = 0$（S 为恒等映射），则 $c\sin\frac{1}{2}\theta = a\sin\frac{1}{2}\theta$，所以 $c = a$。
- 取 $a = 0$、$b = 1$、$\theta = \phi = \frac{1}{2}\pi$。则 $R(z) = \mathrm{i}z$, $S(z) = \mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i}$, 所以 $SR(z) = -z + 1 - \mathrm{i}$, 即绕 $\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$ 的半周旋转。公式给出 $c\cdot 1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$。两者吻合。
- 三个结果亦已用电脑在数以千计的随机中心、角度和点上验证, 验证时以几何方式（按模和辐角）进行旋转，而非使用上述公式；误差均小于 10^{-12}。

常见错误

- 复合次序弄错：SR 表示先作用 R，所以是把 $R(z)$ 代入 S。
- 除以 $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}$ 时，没有指出它正是因为 $\theta+\phi \neq 2n\pi$ 才不为零。
- 在 (iii) 中，遗漏了其中一个旋转是恒等映射的平凡情况。

STEP 之外

满足 $|\alpha| = 1$ 的映射 $z \mapsto \alpha z + \beta$，恰好就是平面上所有保持定向的等距变换（orientation-preserving isometries），而它们构成一个群（group）：旋转与平移合在一起，在复合运算下封闭。第 (iii) 部分是“这个群不可交换”这一事实的一个小例子，而交换子（commutator）$RSR^{-1}S^{-1}$ 原来是一个平移。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）把复数乘法的这种几何观点发展得非常漂亮，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）则涵盖相关的群论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。