详细解答

STEP III 2017，第 11 题

力学 • 动量守恒

STEP III 2017，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s3-q11

本题在 *Beyond STEP* 第 10.3 节火箭与枪炮中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/rockets.html

关键思路

系统不受任何外来的水平力，所以每次发射时水平动量（momentum）都守恒。题目中看似古怪的对地速率 $v - V$，其实说的是一件简单的事：抛射体（projectile）总是以相对于货车的速率 v 射出。至于动能（kinetic energy），不必每次都从头重新计算；应利用 $(*)$ 化简每次发射时的能量变化，然后再加起来。

解答

把货车、炮和抛射体都视为沿同一直线运动的质点（particle），并取向前方向（即货车运动的方向）为正。货车速率为 V 时发射的抛射体，其速度为 $-(v - V) = V - v$，即相对于货车的速度为 $-v$。发射属于系统的内部作用，而轨道是光滑的，所以每次发射时总水平动量都守恒。

第 (i) 部分

发射前一切静止，所以动量为零。由于 $V = 0$，每枚抛射体都以速度 $-v$ 射出，而货车（质量 M）以速率 u 向前运动：

$$Mu - nmv = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{nmv}{M}.$$

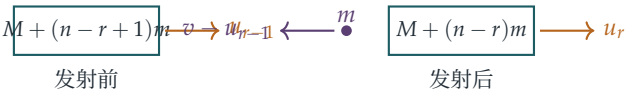
系统起初没有动能，所以所得的能量为

$$K = \tfrac{1}{2}Mu^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}nmv^2\left(1 + \frac{nm}{M}\right),$$

即为所求。

第 (ii) 部分

考虑第 r 次发射。发射前一刻，货车载着 $n-r+1$ 枚未发射的抛射体，所以运动中的质量为 $M+(n-r+1)m$，速率为 u_{r-1}。发射后一刻，质量 $M+(n-r)m$ 以速率 u_r 运动，而一枚质量为 m 的抛射体的速度为 $u_{r-1}-v$。较早发射的抛射体不受影响，可以不予考虑。



由动量守恒得

$$\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1} = \big(M+(n-r)m\big)u_r + m(u_{r-1}-v).$$

把左方写成 $\big(M+(n-r)m\big)u_{r-1} + mu_{r-1}$。于是 mu_{r-1} 项互相抵消，剩下

$$\big(M+(n-r)m\big)(u_r - u_{r-1}) = mv, \qquad \text{所以} \qquad u_r - u_{r-1} = \frac{mv}{M+(n-r)m},$$

这就是 $(*)$。

把 $(*)$ 对 $r = 1, \ldots, n$ 相加，左方伸缩相消（telescoping），且 $u_0 = 0$，所以

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{mv}{M+(n-r)m}.$$

每个分母都满足 $M+(n-r)m \geq M$，所以每一项都不大于 $\dfrac{mv}{M}$。当 $r=1$ 时不等式严格成立，因为 $n>1$ 使 $(n-1)m>0$。因此

$$u_n < n\cdot\frac{mv}{M} = u.$$

想一想 为甚么逐枚发射的效果会较差?

在较早的发射中，炮不仅要推动货车，还要推动车上所有仍未发射的抛射体，所以每一发所带来的速率增量都较小。只有 $r=n$ 这一项（最后一发，车上已无其他负载）与同时发射时每枚所占的份额相同。

第 (iii) 部分

在第 r 次发射时，只有货车（连同其余负载）和刚发射的抛射体的速度会改变。所以

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)u_r^2 + \tfrac{1}{2}m(u_{r-1}-v)^2 - \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r^2-u_{r-1}^2) + \tfrac{1}{2}m\big[(v-u_{r-1})^2-u_{r-1}^2\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1})(u_r+u_{r-1}) + \tfrac{1}{2}m(v^2-2vu_{r-1}). \end{aligned}$$

由 $(*)$，$\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv$，所以第一项为 $\frac{1}{2}mv(u_r+u_{r-1})$。因此

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}mvu_r + \tfrac{1}{2}mvu_{r-1} + \tfrac{1}{2}mv^2 - mvu_{r-1} \\ &= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_r-u_{r-1}), \end{aligned}$$

即为所求。

把上式对 $r=1,\ldots,n$ 相加，并利用 $K_0=0$ 及 $u_0=0$，两边都伸缩相消：

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_n-u_0) = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n.$$

最后与第 (i) 部分比较。由于 $u = nmv/M$，

$$K = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmv\,u.$$

由第 (ii) 部分得 $u_n < u$，而因为 $u>0$ 且 $n>1$，所以 $u < nu$。由于 $mv>0$，

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmvu = K.$$

所以 $K_n < K$：逐枚发射所释放的动能较少。

验算

- 取 $n=3$、$M=10$、$m=1$、$v=1$。则 $u=0.3$，而由 $(*)$ 得 $u_3 = \frac{1}{12}+\frac{1}{11}+\frac{1}{10} = \frac{181}{660} \approx 0.274$，比 u 小，正如预期。能量分别为 $K=1.95$ 及 $K_3 = \frac{2161}{1320} \approx 1.637$。
- 对 n、M、m 和 v 的数千组随机取值，在每一发之后直接计算每个物体的动量和动能，结果与 $(*)$ 及 K_n 的公式完全吻合；这已经由电脑验证。
- 极限情况：若 $m \ll M$，$(*)$ 的每一项都接近 mv/M，所以 $u_n \approx u$，而两个能量都接近 $\frac{1}{2}nmv^2$。当货车非常重时，发射的方式几乎没有影响。

常见错误

- 忘记未发射的抛射体随货车一起运动，在第 r 发之前用了质量 M 而不是 $M+(n-r+1)m$。

- 把抛射体的速度写成 $-v$ 而不是 $u_{r-1}-v$：题目规定的是它相对于地面的速率为 $v-V$，而不是 v。
- 在 K_r-K_{r-1} 中计入较早发射的抛射体的动能。它们不受影响，会互相抵消。

STEP 之外

这是火箭运动的离散版本。若把 n 发炮弹换成连续不断的废气喷流，u_n 的总和便会变成积分，并得出齐奥尔科夫斯基火箭方程（Tsiolkovsky rocket equation），$\Delta u = v\ln(m_0/m_1)$。火箭的处境就像逐枚发射的货车：它的燃料不可能在一瞬间全部烧完，所以要付出第 (ii) 部分所揭示的代价。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对变质量系统和火箭有详细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。