详细解答

STEP III 2017，第 10 题

力学 • 转动的刚体

> **STEP III 2017，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q10

关键思路

在质点未滑动（slip）之前，杆与质点作为一个刚体（rigid body）一同绕铰链（hinge）转动，因此能量守恒（conservation of energy）可立即给出 $\dot{\theta}$，再求导便得 $\ddot{\theta}$。此时质点绕 P 作圆周运动，所以其加速度有熟悉的径向（radial）分量和横向（transverse）分量。单独对质点应用牛顿第二定律（Newton's second law），沿杆方向及垂直于杆方向分解，便得到摩擦力（friction）和法向反作用力（normal reaction）；当摩擦力达到反作用力的 μ 倍时，质点开始滑动。

解答

能量方程

把质点视为质点模型（point mass），并假设铰链光滑（smooth）。均匀杆绕其端点 P 的转动惯量（moment of inertia）为 $\frac{1}{3}m(3a)^2 = 3ma^2$，而与 P 相距 ℓ 的质点则贡献 $m\ell^2$。在没有滑动时，整个系统是一个以角速度（angular speed）$\dot{\theta}$ 绕 P 转动的刚体，其动能（kinetic energy）为

$$\tfrac{1}{2}\left(3ma^2 + m\ell^2\right)\dot{\theta}^2.$$

当杆转过角度 θ 时，其中点（与 P 相距 $\frac{3}{2}a$）下降了 $\frac{3}{2}a\sin\theta$，而质点下降了 $\ell\sin\theta$。铰链的反作用力不作功（其作用点固定不动），而摩擦力和法向反作用力是系统的内力，在没有滑动时不作净功。由静止开始，能量守恒给出

$$\tfrac{1}{2}m\left(3a^2 + \ell^2\right)\dot{\theta}^2 = mg\left(\tfrac{3}{2}a + \ell\right)\sin\theta,$$

两边乘以 $2/m$，即得

$$(3a^2 + \ell^2)\dot{\theta}^2 = g(3a + 2\ell)\sin\theta,$$

此即所求。

角加速度

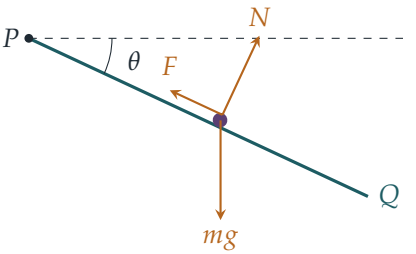
对 t 求导，得

$$2(3a^2+\ell^2)\dot\theta\,\ddot\theta = g(3a+2\ell)\cos\theta\,\dot\theta.$$

当 $t>0$ 时 $\dot\theta\neq 0$，故可两边除以 $2\dot\theta$（$t=0$ 时的结果可由连续性得出，或直接对 P 取力矩得出）：

$$\ddot\theta = \frac{g(3a+2\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

作用于质点的力



杆位于水平线下方，与水平成角 θ。杆对质点施加垂直于杆的法向反作用力 N（方向背离杆，因为质点位于杆的上方），以及沿杆方向的摩擦力 F，我们设其指向 P。质点绕 P 作半径为 ℓ 的圆周运动，因此其加速度有一个垂直于杆、沿 θ 增加方向的分量 $\ell\ddot\theta$（向下并背离杆的上表面），以及一个沿杆指向 P 的分量 $\ell\dot\theta^2$。

在垂直于杆、沿 θ 增加的方向上，重力的分量为 $mg\cos\theta$，而 N 的方向相反：

$$mg\cos\theta - N = m\ell\ddot\theta.$$

沿杆指向 P 的方向上，重力的分量为 $-mg\sin\theta$（它把质点拉离 P）：

$$F - mg\sin\theta = m\ell\dot\theta^2.$$

法向反作用力

代入上面求得的 $\ddot\theta$，

$$N = mg\cos\theta - m\ell\ddot\theta = mg\cos\theta\left(1-\frac{\ell(3a+2\ell)}{2(3a^2+\ell^2)}\right)$$
$$= mg\cos\theta\,\frac{6a^2+2\ell^2-3a\ell-2\ell^2}{2(3a^2+\ell^2)} = \frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

由于 $\ell<2a$，因子 $2a-\ell$ 为正；而当 θ 为锐角时 $\cos\theta>0$。所以 $N>0$；特别地，在 θ 为锐角期间，法向反作用力不为零，质点保持与杆接触。

开始滑动之时

由第二条方程及能量方程，

$$F = mg\sin\theta + m\ell\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta\left(1 + \frac{\ell(3a+2\ell)}{3a^2+\ell^2}\right)$$
$$= mg\sin\theta\,\frac{3a^2+3a\ell+3\ell^2}{3a^2+\ell^2} = \frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2}.$$

当 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 时此式为正，所以摩擦力确实如假设般指向 P：若没有摩擦力，质点便会沿杆向外滑出。

> **想一想** 为甚么滑动的条件是 $F = \mu N$，而不是一条不等式?

在质点紧贴杆而不动时，摩擦力可提供不超过 μN 的任何大小的力，所以我们需要 $F \le \mu N$。当 $\theta = 0$ 时，$F = 0 < \mu N$。随着 θ 增加，F 增大（与 $\sin\theta$ 成正比），而 N 减小（与 $\cos\theta$ 成正比），因此 F/N（它是 $\tan\theta$ 的一个正倍数）稳定递增。质点在第一个使 $F = \mu N$ 的角度处即将滑动：

$$\frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2} = \mu\,\frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

约去 $3mg/(3a^2+\ell^2)$，再除以 $\cos\theta \neq 0$，得

$$\tan\theta = \frac{\mu a(2a-\ell)}{2(\ell^2+a\ell+a^2)},$$

此即所求。

若 $\ell > 2a$

N 的公式是在假设质点随杆一同运动的前提下推导的。若 $\ell > 2a$，公式在 $\theta = 0$ 时给出 $N < 0$，这是不可能的：杆只能推质点，不能拉质点。所以即使在释放的一刻，质点也不能随杆一同运动。

要了解实际发生的情况，可单独考虑杆。在释放的一刻对 P 取力矩，

$$3ma^2\,\ddot{\theta} = mg\cdot\tfrac{3}{2}a \quad\Longrightarrow\quad \ddot{\theta} = \frac{g}{2a},$$

因此杆上位于质点下方的点，起始时的向下加速度为 $\ell\ddot{\theta} = \frac{\ell}{2a}g$；当 $\ell > 2a$ 时，这大于 g。杆下落得比质点自由下落还要快。所以在释放的一刻，质点便离开杆（两者之间的反作用力为零），开始在重力作用下自由下落，而杆则独自摆下。

验算

- 对整个系统绕 P 取力矩，得 $(3ma^2+m\ell^2)\ddot{\theta} = mg\cos\theta\,(\frac{3}{2}a+\ell)$，与对能量方程求导所得的 $\ddot{\theta}$ 相同。

- 边界情况 $\ell = 2a$ 同时符合两种情形：释放时 $N = 0$，而杆上与 P 相距 $2a$ 的点起始加速度恰好为 g。
- 取 $a = \ell = 1$ 及 $\mu = 1$，滑动角满足 $\tan\theta = \frac{1}{6}$；在该角度，上述公式给出 $F/N = 6\tan\theta = 1 = \mu$。$N$ 和 F 的公式亦已用电脑验证：以数值方法逐步模拟运动，并直接由质点的位置计算其加速度。

常见错误

- 误用绕中点的转动惯量 $\frac{1}{12}m(3a)^2$，而非绕铰链的转动惯量；长度为 L 的杆绕一端的转动惯量是 $\frac{1}{3}mL^2$。
- 在摩擦力的方程中漏掉向心（centripetal）项 $m\ell\dot{\theta}^2$；正是这一项令分子成为 $a^2 + a\ell + \ell^2$，而不是 a^2。
- 在法向方程中把 $\ell\ddot{\theta}$ 的符号弄错：杆正以加速度离开质点，所以 N 小于 $mg\cos\theta$，而不是大于。

STEP 之外

最后一部分是一个经典的意外结果：下落中的铰接杆上的某一点，其加速度可以大于 g。这解释了为何放在下落间尺末端附近的硬币（或倾倒中的烟囱）会被“抛离”。要系统地求出 N 和 F 这类约束力（constraint forces），方法是在极坐标（polar coordinates）中写出运动方程；而日后学到的拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）更会展示如何完全不涉及这些力而求得运动。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对刚体转动及这些极坐标下的加速度有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。