详细解答

STEP III 2017，第 1 题

纯数学 · 裂项相消级数的界限

> **STEP III 2017，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q1

关键思路

第 (i) 部分的恒等式（identity）把每个二项式系数（binomial coefficient）的倒数写成一个常数乘以相邻两项的*差*，于是整个和式可以伸缩相消（telescoping）。在第 (ii) 部分，$1/n^3$ 不容易求和，但二项式系数的倒数却可以：$\binom{n+1}{3}$ 和 $\binom{n+2}{5}$ 都是 n 的多项式，分别与 n^3 和 n^5 的倍数相近，所以我们可以把 $1/n^3$ 夹在两个能用第 (i) 部分精确求和的式子之间。

解答

第 (i) 部分

记 $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$。于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}} &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r-1)!} - \frac{r!\,n!}{(n+r)!} \\ &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r)!}[(n+r)-n] = \frac{r\cdot r!\,(n-1)!}{(n+r)!},\end{aligned}$$

其中我们利用 $(n+r)! = (n+r)\,(n+r-1)!$ 和 $n! = n\,(n-1)!$，提出了公因子 $r!\,(n-1)!/(n+r)!$。乘以 $\frac{r+1}{r}$，得

$$\frac{r+1}{r}\left(\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}}\right) = \frac{(r+1)!\,(n-1)!}{(n+r)!} = \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}},$$

因为 $(n+r)-(r+1) = n-1$。这就是所求的恒等式。

求和。设 $a_n = 1/\binom{n+r-1}{r}$，则恒等式可写成 $1/\binom{n+r}{r+1} = \frac{r+1}{r}(a_n - a_{n+1})$。由 $n=1$ 加到 N，

除了首项和末项外，其余全部相消：

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\binom{n+r}{r+1}}=\frac{r+1}{r}(a_1-a_{N+1})=\frac{r+1}{r}\left(1-\frac{1}{\binom{N+r}{r}}\right),$$

因为 $a_1=1/\binom{r}{r}=1$。当 $N\to\infty$ 时，$\binom{N+r}{r}\geq N+r\to\infty$（对 $r\geq 1$ 而言），所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{n+r}{r+1}}=\frac{r+1}{r}.$$

推论。取 $r=2$，由 $n=1$ 起的和为 $\frac{3}{2}$。$n=1$ 那一项是 $1/\binom{3}{3}=1$，所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\binom{n+2}{3}}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}.$$

第 (ii) 部分

第一条不等式。对 $n\geq 3$，

$$\frac{1}{\binom{n+1}{3}}=\frac{3!}{(n+1)n(n-1)}=\frac{3!}{n^3-n}>\frac{3!}{n^3},$$

因为 $0<n^3-n<n^3$（左边的不等式成立是因为 $n\geq 2$）。

第二条不等式。我们有 $\binom{n+1}{3}=\frac{1}{6}n(n^2-1)$ 及 $\binom{n+2}{5}=\frac{1}{120}(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)=\frac{1}{120}n(n^2-1)(n^2-4)$。所以

$$\frac{20}{\binom{n+1}{3}}-\frac{1}{\binom{n+2}{5}}=\frac{120}{n(n^2-1)}-\frac{120}{n(n^2-1)(n^2-4)}=\frac{120\,(n^2-5)}{n(n^2-1)(n^2-4)}.$$

当 $n\geq 3$ 时，因子 n、n^2-1、n^2-4 全部为正，所以此式小于 $120/n^3=5!/n^3$ 当且仅当

$$n^2(n^2-5)<(n^2-1)(n^2-4),\quad \text{即}\quad n^4-5n^2<n^4-5n^2+4,$$

而这显然成立。

> ? **想一想** 我们需要第 (i) 部分中的哪些和式？它们由哪一项开始？

我们需要 $\sum_{n\geq 3}1/\binom{n+1}{3}$ 和 $\sum_{n\geq 3}1/\binom{n+2}{5}$。在第一个和式中设 $m=n-1$，它变成 $\sum_{m\geq 2}1/\binom{m+2}{3}=\frac{1}{2}$，正正就是第 (i) 部分的推论。在第二个和式中设 $m=n-2$，它变成 $\sum_{m\geq 1}1/\binom{m+4}{5}$，即第 (i) 部分取 $r=4$ 的情况，得 $\frac{5}{4}$。

所涉及的级数全部收敛（convergent）（它们都是正项级数，并且如上述不等式所示，被收敛级数所界）。把收敛级数之间的严格不等式逐项相加，得到的仍是严格不等式，因为各个正差之和至少等于其首项，而首项是正数。记 $T=\sum_{n\geq 3}1/n^3$。

上界。把第一条不等式对 $n \geq 3$ 求和：

$$6T < \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \text{所以} \qquad T < \frac{1}{12}.$$

下界。把第二条不等式对 $n \geq 3$ 求和：

$$120\,T > 20 \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = \frac{35}{4}, \qquad \text{所以} \qquad T > \frac{35}{480} = \frac{7}{96}.$$

最后，$\sum_{n\geq 1} 1/n^3 = 1 + \frac{1}{8} + T$，而 $1 + \frac{1}{8} = \frac{108}{96}$。因此

$$\frac{108+7}{96} = \frac{115}{96} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{108}{96} + \frac{8}{96} = \frac{116}{96},$$

证毕。

验算

- 以 $n = r = 1$ 测试恒等式：$1/\binom{2}{2} = 1$，而 $2\,(1/\binom{1}{1} - 1/\binom{2}{1}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$。
- 当 $r = 1$ 时，和为 $\sum 1/\binom{n+1}{2} = \sum \frac{2}{n(n+1)} = 2$，这是大家熟悉的伸缩和，与 $\frac{r+1}{r} = 2$ 吻合。
- 数值上 $\sum 1/n^3 \approx 1.20206$，而 $\frac{115}{96} \approx 1.19792$、$\frac{116}{96} \approx 1.20833$，所以上下界成立，并把该值确定在约 0.01 的范围之内。

常见错误

- 移位后弄错起始指标：$\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+1}{3}$ 由 $\binom{4}{3}$ 开始，这是第 (i) 部分推论中 $n = 2$ 的那一项，而不是 $n = 1$ 的那一项。
- 忘记加上 $n = 1, 2$ 时的项 $1 + \frac{1}{8}$，这两项并不在不等式涵盖的范围内。

STEP 之外

数 $\sum 1/n^3$ 就是 $\zeta(3)$，称为阿佩里常数（Apéry's constant）；与 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ 不同，它没有已知的闭合形式。阿佩里（Apéry）在 1978 年证明它是无理数（irrational），所用的正是与这里相似的快速收敛级数。把一个级数与伸缩级数比较，以及把不等式逐项相加，都是大学第一个分析（analysis）课程的标准工具。如想仔细了解收敛性和比较判别法（comparison test），可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。