详细解答

STEP II 2017，第 9 题

力学 · 摩擦力与刚体

> **STEP II 2017，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q9

关键思路

每个圆柱都是刚体（rigid body），而且只在两处受力：木板和地面。因此第一步自然是对圆柱的中心取力矩（moments）：两个法向反作用力（normal reaction）都通过中心，剩下的只有两个摩擦力（friction），而它们必须相等。之后只需分别对圆柱和木板分解力（resolving），再代入接触点的摩擦定律 $G \leq \frac{1}{2}R$ 和 $F \leq \frac{1}{2}N$。最后才用几何关系把 θ 与 a 和 r 联系起来。

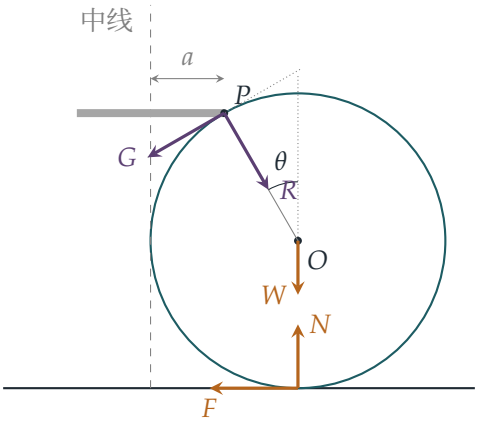
解答

模型与设置。 把横截面看作两个半径为 r 的圆盘和一根水平杆，所有接触点都是粗糙的。两个圆柱之间的距离可忽略，所以它们的中心分别位于对称铅垂线两侧、水平距离为 r 之处。木板宽度为 $2a < 2r$，所以它以两条长边搁在两个圆柱内侧的上部。由对称性，我们只需考虑右边的圆柱。

设 P 为木板与该圆柱的接触点。P 处的切线（tangent）与水平的木板成 θ 角，所以通往 P 的半径与铅垂线成 θ 角。作用在圆柱上的力为：

- 其重量 W，作用于中心 O；
- 在地面处，向上的法向反作用力 N 和摩擦力 F（指向中线，因为木板把圆柱向外推）；
- 在 P 处，沿 PO 方向的法向反作用力 R，以及沿切线方向、指向下方和内侧的摩擦力 G。

根据牛顿第三定律（Newton's third law），木板受到沿 OP 方向的 R（向上、背离中线），以及沿切线方向、指向上方和外侧的 G。



通过 P 的虚线是切线。在水平方向上，P 比中心 O 更靠内 $r\sin\theta$，而 O 与中线的距离为 r。

第 (i) 部分

对圆柱取关于 O 的力矩。W、N 和 R 都通过 O。两个摩擦力都与圆相切，所以各自的力矩为（力）$\times r$，而且转动方向相反：F 在底部，指向内侧；G 在 P 处，指向下方和内侧。因此

$$Fr = Gr \quad \Longrightarrow \quad G = F.$$

对圆柱作水平分解（以向外为正）：R 的水平分量为向外的 $R\sin\theta$，G 的分量为向内的 $G\cos\theta$，而地面摩擦力 F 向内，所以

$$R\sin\theta - G\cos\theta - F = 0.$$

由于 $G = F$，上式即

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta),$$

此即所求。

推论。木板处没有滑动，所以该处的摩擦力满足 $G \le \frac{1}{2}R$，即 $F \le \frac{1}{2}R$。于是

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta) \le \tfrac{1}{2}R(1+\cos\theta),$$

两边除以 $\frac{1}{2}R > 0$（木板压在圆柱上），得 $2\sin\theta \le 1+\cos\theta$。

第 (ii) 部分

对木板作铅垂分解。每条边都受到 R，其向上分量为 $R\cos\theta$；又受到沿切线向上的 $G = F$，其向上分量为 $F\sin\theta$。所以

$$2(R\cos\theta + F\sin\theta) = kW.$$

由第 (i) 部分，$R = \dfrac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$，所以

$$R\cos\theta + F\sin\theta = \frac{F\left[(1+\cos\theta)\cos\theta + \sin^2\theta\right]}{\sin\theta} = \frac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta},$$

这是因为 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。因此

$$\tfrac{1}{2}kW = \frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}F.$$

（由对称性，木板所受的水平力互相抵消，力矩亦然。）

对圆柱作铅垂分解。木板施加的反作用力向下推，大小为 $R\cos\theta + G\sin\theta = \tfrac{1}{2}kW$，所以

$$N = W + \tfrac{1}{2}kW = \left(\frac{2}{k}+1\right)\tfrac{1}{2}kW = \left(1+\frac{2}{k}\right)\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)F.$$

这就是所求的表达式。（这不过是显而易见的事实：地面承受总重量 $2W + kW$ 的一半。）

地面处没有滑动。条件为

$$F \le \tfrac{1}{2}N.$$

由 N 的表达式，

$$\frac{N}{F} = \left(1+\frac{2}{k}\right)\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$$

由于 θ 为锐角时 $\sin\theta > 0$，第 (i) 部分给出 $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \ge 2$；又因 $k > 0$，有 $1 + \frac{2}{k} > 1$。所以 $N/F > 2$，即 $F < \frac{1}{2}N$。因此只要木板不滑动，地面的条件便自动成立，对 θ 没有额外限制。

? **想一想** 两个接触点的摩擦力同样是 F，为何地面接触点的条件会“免费”成立？

因为地面压得更用力。比较 R 和 N 的公式，得 $N = \left(1+\frac{2}{k}\right)R > R$，因为地面还要承受圆柱本身的重量。两个接触点的摩擦力相同，而地面的法向力较大，所以总是木板接触点先滑动。

第 (iii) 部分

把第 (i) 部分的不等式移项后平方。两边都是正数，所以平方后不等号方向不变：

$$4\sin^2\theta \le (1+\cos\theta)^2 \iff 4(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) \le (1+\cos\theta)^2.$$

除以 $1+\cos\theta > 0$，得 $4 - 4\cos\theta \le 1 + \cos\theta$，即 $\cos\theta \ge \frac{3}{5}$。由于 θ 为锐角，

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \le \sqrt{1-\tfrac{9}{25}} = \tfrac{4}{5}.$$

（等价地，设 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$，则不等式变为 $2t \le 1$，而 $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$ 在 $t = \frac{1}{2}$ 时最大为 $\frac{4}{5}$。）

几何关系。木板的边 P 与中线的水平距离为 a。中心 O 与中线的距离为 r，而 P 比 O 更接近中线 $r\sin\theta$。所以

$$a = r - r\sin\theta = r(1-\sin\theta) \geq r\left(1-\tfrac{4}{5}\right) = \tfrac{1}{5}r,$$

由此得 $r \leq 5a$。

验算

- 在极端情况 $\sin\theta = \frac{4}{5}$、$\cos\theta = \frac{3}{5}$ 下，取 $W = 1$ 及 $k = 1$。木板的方程给出 $F = \frac{1}{4}$，于是 $R = \frac{1}{2}$、$N = \frac{3}{2}$。所以 $G/R = \frac{1}{2}$ 恰好成立（木板处于将要滑动的状态），而 $F/N = \frac{1}{6}$，远低于 $\frac{1}{2}$，与第 (ii) 部分的预测一致。
- 四条平衡（equilibrium）方程（力矩方程，以及对两个物体的分解）都经电脑以 10^5 组随机的 W、k 和 θ 验证。同时亦验证了：$G \leq \frac{1}{2}R$ 成立当且仅当 $\sin\theta \leq \frac{4}{5}$，而此时 $F < \frac{1}{2}N$ 总是成立。
- 极限情况的合理性：宽木板（$a \to r$）搁在接近圆柱顶部的位置，所以 $\theta \to 0$，几乎不需要摩擦力。窄木板则深深卡在两个圆柱之间，最终会从两者之间滑下去。

常见错误

- 漏掉力矩方程，因而没有发现 $G = F$。没有这一点，未知数就太多了。
- 弄错木板处摩擦力的方向：两个圆柱有向两旁滚开的趋势，所以作用在圆柱上的摩擦力指向下方和内侧。
- 写成 $a = r\sin\theta$ 而不是 $a = r(1-\sin\theta)$：a 是从中线量起的，而不是从圆柱的中心量起。

STEP 之外

这是一个小型的静定（statically determinate）系统：三个物体，方程数目足以确定每一个力，而摩擦力给出的不等式则划定了可能的位置。在大学一年级的课程中，同样的概念会以刚体平衡条件（合力为零及合力矩为零）的形式再次出现，之后又会在楔入与卡死（wedging and jamming）的研究中出现。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对刚体静力学和摩擦力有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。