详细解答

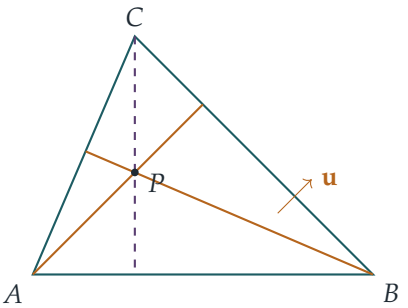
STEP II 2017，第 8 题

纯数学 · 向量与垂心

> **STEP II 2017，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q8

关键思路

这是用向量证明三角形三条高（altitude）相交于同一点，即垂心（orthocentre）。要求两条直线 $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$ 的交点，窍门是把方程与一个垂直于 $\mathbf{v}$ 的向量取纯量积（scalar product）：这样一下子就消去了 μ。这里这样的向量已经现成给了我们，因为 $\mathbf{v}$ 垂直于 CA，所以 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 正好合用。



解答

第一条高

通过 A 且垂直于 BC 的直线经过 $\mathbf{a}$，方向为 $\mathbf{u}$（我们身处平面之中，所以每个垂直于 BC 的向量都是 $\mathbf{u}$ 的倍数）。其方程为

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}.$$

同理，通过 B 且垂直于 CA 的直线是 $\mathbf{r}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$。

求 P

这两条直线并不平行：若 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 平行，那么在同一平面上分别垂直于它们的 BC 与 CA 便会平行，这对三角形来说是不可能的。因此两线恰好相交于一点 P，在该点有

$$\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}.$$

把两边都与 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 取纯量积。由于 $\mathbf{v}$ 垂直于 CA，$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$，于是 μ 消失：

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})+\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}),\qquad\text{所以}\qquad\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

> ? **想一想** 我们可以除以 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ 吗?

可以。若 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$，则 $\mathbf{u}$ 既垂直于 BC，亦垂直于 CA；在平面上，这迫使 CA 与 BC 平行，但它们并不平行。因此

$$\mathbf{p}=\mathbf{a}+\frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}\,\mathbf{u}.$$

CP 垂直于 AB

我们需要证明 $(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=0$。以 λ 记上面求得的系数，则

$$(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

有用的观察是：由于 $\mathbf{u}$ 垂直于 BC，$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$，所以

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})+\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

因此 $\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\lambda\,\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$，而

$$(\mathbf{p}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})=-(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})+(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0.$$

> ? **想一想** 纯量积为零，真的能给出一条直线 CP 吗?

只有在 $P\neq C$ 时才行，而这正是用到“非直角”这个条件的地方。若 $P=C$，则 C 位于通过 A 且垂直于 BC 的直线上，于是 $AC\perp BC$，C 处的角是直角，而这已被排除。所以 $\mathbf{p}-\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$；又因 $\mathbf{b}-\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$，纯量积为零正好表示 CP 垂直于 AB。因此三条高都通过 P。

验算

取 $A=(0,0)$、$B=(5,0)$、$C=(1.5,3.5)$ 及 $\mathbf{u}=(1,1)$，它垂直于 $\mathbf{c}-\mathbf{b}=(-3.5,3.5)$。于是 $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=7.5$，$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=5$，所以 $\lambda=1.5$，$P=(1.5,1.5)$。这一点位于 C 的正

下方, 所以 CP 是铅垂的, 垂直于 AB; 而 $(\mathbf{p}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = (-3.5)(1.5)+(1.5)(3.5) = 0$, 所以 P 亦在由 B 出发的高上。一般结果亦已用电脑在大量随机三角形上验证过。另请留意，若把 $\mathbf{u}$ 换成 $k\mathbf{u}$，$\mathbf{p}$ 的公式不变，这是理所当然的。

常见错误

- 与 $\mathbf{v}$ 或 $\mathbf{u}$ 而非与 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 作点积：这样方程中两个参数都会留下。
- 除以 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ 时没有说明它为何不等于零。
- 漏掉 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ 这一步，而最后能够相消，靠的正是这一步。

STEP 之外

任何三角形的垂心 H、形心（centroid）G 与外心（circumcentre）O 都位于同一直线上, 即欧拉线（Euler line), 且 $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$; 若以 O 为原点, 这就是简洁的命题 $\mathbf{h} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, 你可以用同样的纯量积思路来证明它。这类纯量积正是大学线性代数（linear algebra）入门课程中所研究的内积空间（inner-product space）的起点；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）是看它们如何发展下去的好地方。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。