详细解答

STEP II 2017，第 7 题

纯数学 · 对数微分法

> **STEP II 2017，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q7

关键思路

这里每一个幂都是通过对数（logarithm）来定义的，即 $a^b = \mathrm{e}^{b\ln a}$，所以比较 x 的两个幂，就等于比较它们的对数；由于 exp 是递增（increasing）函数，两种比较是等价的。唯一要留意的是 $\ln x$ 的正负号：当 $0 < x < 1$ 时它是负数，而除以负数会令不等式反向。取对数亦令求导数（derivative）变得直截了当。

解答

全文中，$\ln \mathrm{f}(x) = x\ln x$ 及 $\ln \mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x)\ln x$。

第 (i) 部分

设 $0 < x < 1$，则 $\ln x < 0$ 且 $x - 1 < 0$。于是

$$\ln \mathrm{f}(x) - \ln x = x\ln x - \ln x = (x-1)\ln x > 0,$$

因为这是两个负数的乘积。由于 exp 是递增的，所以 $\mathrm{f}(x) > x$。

此外 $x\ln x < 0$，所以 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x\ln x} < 1$。现在再比较对数：

$$\begin{aligned} \ln \mathrm{g}(x) - \ln x &= (\mathrm{f}(x) - 1)\ln x > 0, && \text{因为} \mathrm{f}(x) < 1 \text{ 且 } \ln x < 0, \\ \ln \mathrm{f}(x) - \ln \mathrm{g}(x) &= (x - \mathrm{f}(x))\ln x > 0, && \text{因为} \mathrm{f}(x) > x \text{ 且 } \ln x < 0. \end{aligned}$$

所以 $\ln x < \ln \mathrm{g}(x) < \ln \mathrm{f}(x)$，由此得出当 $0 < x < 1$ 时 $x < \mathrm{g}(x) < \mathrm{f}(x)$，正如所求。

当 $x > 1$ 时，同样的差仍然适用，但此时 $\ln x > 0$、$x - 1 > 0$ 及 $x\ln x > 0$，所以 $\mathrm{f}(x) > 1$。

于是由 $(x-1)\ln x > 0$ 得 $\mathrm{f}(x) > x$，而由 $(x-\mathrm{f}(x))\ln x < 0$ 得 $\mathrm{g}(x) > \mathrm{f}(x)$。所以

$$x < \mathrm{f}(x) < \mathrm{g}(x) \qquad \text{当} x > 1,$$

而在 $x = 1$ 时三者皆等于 1。

第 (ii) 部分

对 $\ln \mathrm{f}(x) = x \ln x$ 求导，得 $\mathrm{f}'(x)/\mathrm{f}(x) = \ln x + 1$，所以

$$\mathrm{f}'(x) = x^x(\ln x + 1).$$

由于 $x^x > 0$，$\mathrm{f}'(x) = 0$ 当且仅当 $\ln x = -1$，即 $x = \mathrm{e}^{-1}$。（f′ 在该处由负变正，所以这是极小值（minimum），其值为 $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} \approx 0.692$。）

第 (iii) 部分

当 $x \to 0$ 时，$x \ln x \to 0$，而 exp 是连续（continuous）的，所以

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x \ln x} \to \mathrm{e}^0 = 1.$$

接着 $\ln \mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x) \ln x$，其中 $\mathrm{f}(x) \to 1$ 而 $\ln x \to -\infty$，所以 $\ln \mathrm{g}(x) \to -\infty$，因此

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{g}(x) = 0.$$

第 (iv) 部分

对 $x > 0$，设 $h(x) = x^{-1} + \ln x$。则

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2},$$

它在 $0 < x < 1$ 时为负，在 $x > 1$ 时为正。所以 h 先递减后递增，其最小值为 $h(1) = 1$。因此对所有 $x > 0$，$x^{-1} + \ln x \geq 1$。

现在用积法则（product rule）对 $\ln \mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x) \ln x$ 求导，并利用第 (ii) 部分：

$$\frac{\mathrm{g}'(x)}{\mathrm{g}(x)} = \mathrm{f}'(x) \ln x + \frac{\mathrm{f}(x)}{x} = x^x \left[(\ln x + 1) \ln x + \frac{1}{x} \right] = x^x \left[(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \right].$$

想一想 刚证明的不等式怎样帮助处理这个括号?

括号内正好包含 $\frac{1}{x} + \ln x$，而它至少是 1。所以

$$(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \;\geq\; (\ln x)^2 + 1 \;>\; 0.$$

由于 $g(x) > 0$ 及 $x^x > 0$，我们得到

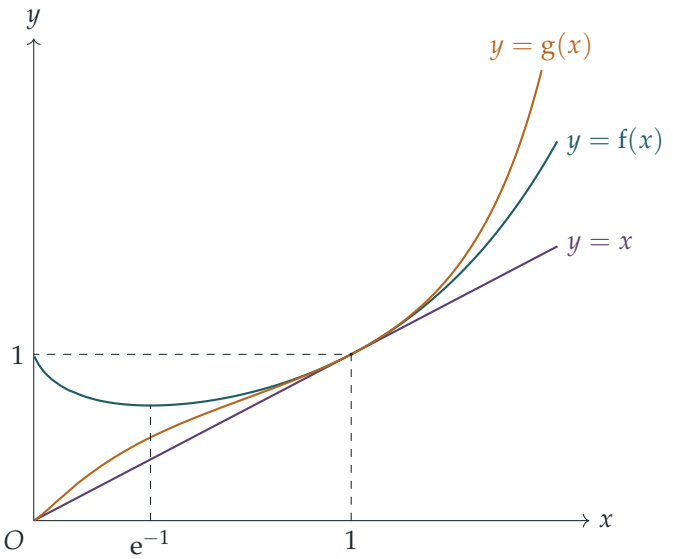
$$g'(x) = g(x)\, x^x \left[(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \right] > 0 \qquad \text{对所有} x > 0,$$

正如所求。

草图

把各项事实汇集起来：

- 当 $x \to 0$ 时，$y = f(x)$ 从 1 开始，下降至 $x = e^{-1}$ 处的极小值 $e^{-1/e}$，然后上升经过 $(1,1)$，并增长得非常快。在 0 附近它非常陡峭，因为 $f'(x) = x^x(\ln x + 1) \to -\infty$。
- $y = g(x)$ 从原点开始，并一直递增（第 (iv) 部分），经过 $(1,1)$。
- 当 $0 < x < 1$ 时，次序为 $x < g < f$；当 $x > 1$ 时，次序为 $x < f < g$。所以 g 与 f 在 $(1,1)$ 相交，而三条曲线都在该处相遇。
- 在 $x = 1$：$f'(1) = 1$ 及 $g'(1) = 1 \cdot 1 \cdot (0 + 0 + 1) = 1$，所以两条曲线都在 $(1,1)$ 与 $y = x$ 相切。
- 在原点附近 $g(x)/x = e^{(f(x)-1)\ln x} \to 1$（因为 $f(x) - 1 \approx x \ln x$，指数的表现类似 $x(\ln x)^2 \to 0$），所以 $y = g(x)$ 沿着 $y = x$ 离开原点，并略高于它。



验算

- 在 $x = \frac{1}{2}$：$\mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ 及 $\mathrm{g} = (\frac{1}{2})^{0.707} \approx 0.613$，所以 $0.5 < 0.613 < 0.707$。在 $x = 2$：$\mathrm{f} = 4$ 及 $\mathrm{g} = 2^4 = 16$，所以 $2 < 4 < 16$。
- $\mathrm{f}(0.3) \approx 0.697$、$\mathrm{f}(\mathrm{e}^{-1}) \approx 0.6922$ 及 $\mathrm{f}(0.4) \approx 0.693$，与在 e^{-1} 处取极小值相符。
- g' 的公式给出 $\mathrm{g}'(\frac{1}{2}) \approx 0.774$，与 g 在该处的差商（difference quotient）吻合；电脑验算亦确认了在 $(0,3)$ 上 $\mathrm{g}' > 0$。

常见错误

- 忘记在 $(0,1)$ 上 $\ln x < 0$，因而除以它时没有把不等式反向；这正正是次序在 $x = 1$ 处对调的原因。
- 把 x^x 的导数写成 $x \cdot x^{x-1}$（把指数（index）当作常数），或写成 $x^x \ln x$（把底（base）当作常数）；两部分都是需要的。
- 把 g 的极限（limit）写成 $1^{-\infty}$ 然后靠猜；应改为处理 $\ln \mathrm{g} = \mathrm{f} \ln x$。

STEP 之外

幂塔 $x^{x^{x^{\cdots}}}$ 延续了这个规律：当 $0 < x < 1$ 时，奇数层的幂塔 x, g, … 与偶数层的幂塔 f, … 互相交错；而无穷幂塔收敛（converges）当且仅当 $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \le x \le \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$，这是关于单调数列（monotone sequences）和不动点（fixed points）的一道好练习。像 $x \ln x \to 0$ 这类极限，以及通过 exp 和 ln 严谨地定义 a^b，都会在大学第一个分析（analysis）课程中得到妥善处理；可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。