详细解答

STEP II 2017，第 6 题

纯数学 · 不等式与数学归纳法

STEP II 2017，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s2-q6

关键思路

两部分都是把和 S_n 与 $2\sqrt{n}$ 比较，而 $2\sqrt{n}$ 大约等于 $\int_0^n x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$。在第 (i) 部分的归纳法（induction）中，由 n 推到 $n+1$ 的一步，归结为比较 $1/\sqrt{n+1}$ 与 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，而把这个差有理化（rationalising）便可解决。在第 (ii) 部分，最小的 C 就是右方（不计 C）与 S_n 之间差距的最大值。因此我们研究这个差距由 n 到 $n+1$ 如何变化，而题目给出的不等式（inequality）正好告诉我们这个差距总是在缩小。

解答

第 (i) 部分

设 $P(n)$ 为命题 $S_n \le 2\sqrt{n}-1$。

基本情况。$S_1 = 1$ 而 $2\sqrt{1}-1=1$，所以 $P(1)$ 成立（等号成立）。

归纳步骤。假设对某个 $k \ge 1$，$P(k)$ 成立。那么

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

所以只需证明

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k+1}, \qquad \text{即是} \qquad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}).$$

有理化后，

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \ge \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

因为 $\sqrt{k} \le \sqrt{k+1}$ 使分母不大于 $2\sqrt{k+1}$。因此 $S_{k+1} \le 2\sqrt{k+1} - 1$，这正是 $P(k+1)$。

由于 $P(1)$ 为真，而且对每个 $k \ge 1$ 都有 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$，所以对所有正整数 n，$S_n \le 2\sqrt{n} - 1$。

第 (ii) 部分：不等式

当 $k \ge 0$ 时，$(4k+1)\sqrt{k+1} > (4k+3)\sqrt{k}$ 的两边都是非负的，而且左方是正数，所以这个不等式等价于两边平方后的不等式。现在

$$\begin{aligned}(4k+1)^2(k+1) - (4k+3)^2 k &= (16k^2+8k+1)(k+1) - (16k^2+24k+9)k \\ &= (16k^3+24k^2+9k+1) - (16k^3+24k^2+9k) \\ &= 1 > 0.\end{aligned}$$

所以 $(4k+1)^2(k+1) > (4k+3)^2 k$，取正平方根便得对所有 $k \ge 0$，$(4k+1)\sqrt{k+1} > (4k+3)\sqrt{k}$，得证。

第 (ii) 部分：最小的 C

定义

$$T_n = 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - S_n.$$

不等式 $S_n \ge 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - C$ 与 $C \ge T_n$ 相同。所以它对每个 n 都成立，当且仅当 C 不小于每一个 T_n；而最小的这样的 C 就是 T_n 的最大值（如果存在的话）。

? **想一想** 在不知道 S_n 的公式的情况下，怎样找出最大的 T_n?

我们考虑变化量 $T_{n+1} - T_n$，在其中 S_n 会消去。由于 $S_{n+1} - S_n = 1/\sqrt{n+1}$，

$$\begin{aligned}T_{n+1} - T_n &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

两边乘以正数 $2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$：

$$\begin{aligned}2\sqrt{n}\sqrt{n+1}\,(T_{n+1} - T_n) &= 4(n+1)\sqrt{n} - 4n\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \\ &= (4n+3)\sqrt{n} - (4n+1)\sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

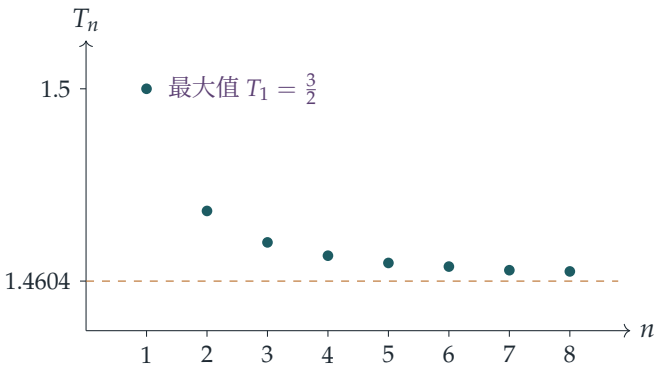
根据刚才证明的不等式（取 $k = n$），这是负数。因此对每个 $n \ge 1$ 都有 $T_{n+1} < T_n$：数列（sequence）T_n 严格递减（strictly decreasing），其最大值就是第一项，

$$T_1 = 2 + \tfrac{1}{2} - 1 = \tfrac{3}{2}.$$

所以对所有 $n \geq 1$，$S_n \geq 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{3}{2}$。任何更小的 C 都不行，因为在 $n = 1$ 时不等式变成 $1 \geq \frac{5}{2} - C$，这要求 $C \geq \frac{3}{2}$。所求的最小数是

$$C = \tfrac{3}{2}.$$

T_n 的首几个值显示它稳定下来的速度有多快：



（纵轴经过拉伸：它的范围大约由 1.45 至 1.51。）

验算

- 当 $n = 4$：$S_4 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \approx 2.7845$，它介乎 $2\sqrt{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = 2.75$ 与 $2\sqrt{4} - 1 = 3$ 之间，符合两个结果的要求。
- 用电脑检查首 200 000 个值，确认了两个界都成立，而且 T_n 递减；T_n 由 1.5 下降，趋向大约 1.46035，并且永不回到 1.5。
- 恒等式 $(4k+1)^2(k+1) - (4k+3)^2 k = 1$ 很容易在 $k = 1$ 时验证：$25 \cdot 2 - 49 = 1$。

常见错误

- 以 T_n 的极限（大约 1.46）作答，而不是它的最大值。小于 $\frac{3}{2}$ 的 C 在 $n = 1$ 时不成立。
- 把不等式平方之前，没有先指出两边都是非负的。
- 忘记证明 $C = \frac{3}{2}$ 确实是最小的，即没有指出等号成立的情况。

STEP 之外

数列 T_n 递减至一个极限，而这个极限是 $-\zeta(\frac{1}{2}) \approx 1.46035$，其中 ζ 是黎曼 zeta 函数（Riemann zeta function），并已延拓至其定义级数收敛的区域以外。把和与积分比较，再

以像 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 这样的项作修正，正是欧拉－麦克劳林公式（Euler–Maclaurin formula）的起点。背后的基本事实——有界的单调数列必定收敛——就是大学一年级分析课中的单调收敛定理（monotone convergence theorem）；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对此有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。