详细解答

STEP II 2017，第 5 题

纯数学 · 抛物线的法线与圆

STEP II 2017，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s2-q5

关键思路

一切都建基于抛物线（parabola）$x = at^2, y = 2at$ 的一个事实：连接参数（parameter）为 t_1 和 t_2 两点的弦（chord），其斜率（gradient）为 $\dfrac{2}{t_1 + t_2}$。有了这个事实，“法线与曲线再次相交”和“半圆上的圆周角是直角”都变成参数之间的简单方程，几何问题便化为简短的代数运算。

解答

一个有用的事实：弦的斜率

对于相异参数 $t_1 \neq t_2$，连接 $(at_1^2, 2at_1)$ 与 $(at_2^2, 2at_2)$ 的弦的斜率为

$$\frac{2a(t_1 - t_2)}{a(t_1^2 - t_2^2)} = \frac{2}{t_1 + t_2},$$

这里约去了 $t_1 - t_2 \neq 0$。（若 $t_1 + t_2 = 0$，则该弦是铅垂的。）令 $t_2 \to t_1$，可知在 t 处的切线（tangent）斜率为 $\frac{1}{t}$；直接计算亦得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$。

第 (i) 部分

在 P 处切线斜率为 $\frac{1}{p}$，故法线（normal）斜率为 $-p$（这里用到 $p \neq 0$）。点 N（其中 $n \neq p$）在这条法线上，当且仅当弦 PN 的斜率为 $-p$：

$$\frac{2}{p + n} = -p \iff p + n = -\frac{2}{p} \iff n = -\left(p + \frac{2}{p}\right).$$

（弦 PN 不可能是铅垂的，因为 P 处的法线斜率 $-p$ 是有限的。）注意 $n \neq p$，因为 $n - p = -2(p + \frac{1}{p})$，而对实数 p 而言 $p + \frac{1}{p} \neq 0$，所以这的确是另一个点。这就是所求的结果。

第 (ii) 部分

利用 $p + n = -\frac{2}{p}$ 及 $p - n = 2p + \frac{2}{p} = \dfrac{2(p^2+1)}{p}$，

$$\begin{aligned}
|PN|^2 &= a^2(p^2 - n^2)^2 + 4a^2(p-n)^2 \\
&= a^2(p-n)^2[(p+n)^2 + 4] \\
&= a^2 \cdot \frac{4(p^2+1)^2}{p^2} \cdot \left(\frac{4}{p^2} + 4\right) = a^2 \cdot \frac{4(p^2+1)^2}{p^2} \cdot \frac{4(p^2+1)}{p^2} \\
&= 16a^2 \frac{(p^2+1)^3}{p^4},
\end{aligned}$$

正如所求。

为求最小值，设 $u = p^2 > 0$ 及 $f(u) = \dfrac{(u+1)^3}{u^2}$。由商法则（quotient rule），

$$f'(u) = \frac{3(u+1)^2u^2 - 2u(u+1)^3}{u^4} = \frac{(u+1)^2(3u - 2u - 2)}{u^3} = \frac{(u+1)^2(u-2)}{u^3}.$$

当 $u > 0$ 时，因子 $\frac{(u+1)^2}{u^3}$ 为正，所以当 $0 < u < 2$ 时 $f'(u) < 0$，当 $u > 2$ 时 $f'(u) > 0$。因此 f 先递减后递增，其在 $u > 0$ 上的最小值出现在 $u = 2$，即 $p^2 = 2$。由于 $|PN|^2 = 16a^2 f(p^2)$，这亦使 $|PN|$ 取得最小值。（最小值为 $|PN|^2 = 16a^2 \cdot \frac{27}{4} = 108a^2$，故 $|PN| = 6\sqrt{3}\,a$。）

第 (iii) 部分

由于 PN 是直径（diameter），而 Q 是圆上异于 P 和 N 的点，所以角 PQN 是直角（半圆上的圆周角（angle in a semicircle））。因此 $QP \perp QN$。

> ? **想一想** QP 或 QN 会否是铅垂的，以致我们不能把斜率相乘?

若 QP 是铅垂的，则 QN 是水平的，于是 Q 和 N 的 y 坐标相同，得 $q = n$，但由于 $Q \neq N$，这是不可能的。同理，若 QN 是铅垂的，则 QP 必为水平，得 $q = p$。所以两个斜率都是有限且非零的，而它们的乘积为 -1：

$$\frac{2}{q+p} \cdot \frac{2}{q+n} = -1 \iff (q+p)(q+n) = -4.$$

展开，并利用第 (i) 部分的 $p + n = -\frac{2}{p}$ 及 $pn = -p^2 - 2$，

$$q^2 + (p+n)q + pn = q^2 - \frac{2q}{p} - p^2 - 2 = -4,$$

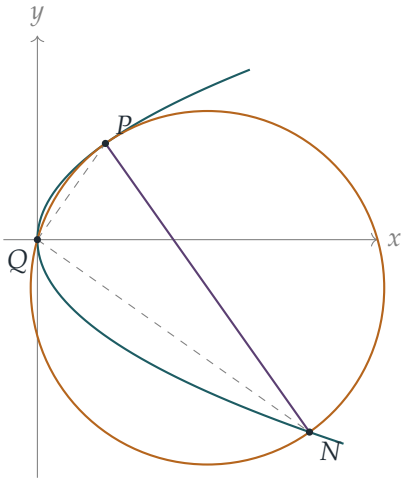
整理后得

$$2 = p^2 - q^2 + \frac{2q}{p},$$

正如所求。

推论。代入 $q = 0$：关系式变成 $2 = p^2$。反之，若 $p^2 = 2$，关系式给出 $q^2 - \frac{2q}{p} = 0$，即 $q = 0$ 或 $q = \frac{2}{p}$；但 $\frac{2}{p} = \frac{p^2}{p} = p$，这就是点 P 本身，所以 Q 必有 $q = 0$。因此 Q 位于原点当且仅当 $p^2 = 2$，而由第 (ii) 部分，这恰好就是 $|PN|$ 取最小值的情况。

一般而言，该关系式是一条二次方程 $q^2 - \frac{2}{p}q + (2 - p^2) = 0$，其两根之和为 $\frac{2}{p}$；其中一根必定是 $q = p$，所以另一根为 $q = \dfrac{2 - p^2}{p}$，它为零当且仅当 $p^2 = 2$。



上图显示取最小值的情况 $a = 1, p = \sqrt{2}$：法线 PN（梅紫色）、以 PN 为直径的圆（琥珀色），以及在 $Q = O$ 处的直角。

验算

- 取 $a = 1, p = 1$：$n = -3$，所以 $P = (1, 2)$ 及 $N = (9, -6)$。于是 $|PN|^2 = 64 + 64 = 128$，而公式给出 $16 \cdot 8/1 = 128$。
- 取 $p = \sqrt{2}, a = 1$：$P = (2, 2\sqrt{2})$，$N = (8, -4\sqrt{2})$，且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{ON} = 16 - 16 = 0$，所以原点确实在以 PN 为直径的圆上。此时 $|PN| = 6\sqrt{3} \approx 10.392$。
- 对多个 p 值以数值方法找出圆与抛物线的交点，除 P 外，所得的参数恰好就是 n 和 $\frac{2-p^2}{p}$。

常见错误

- 忘记 $q = p$ 亦满足最后的关系式，因而错误地断定当 $p^2 = 2$ 时 Q 有两个可能位置。
- 把法线斜率写成 $-\frac{1}{p}$：切线斜率是 $\frac{1}{p}$，所以法线斜率是 $-p$。

STEP 之外

一个圆与一条抛物线一般相交于四点；把 $x = at^2, y = 2at$ 代入圆的方程，会得到一条关于 t 且没有 t^3 项的四次方程（quartic），所以四个参数之和为零。这里 $n + q = -\frac{2}{p} - p + \frac{2}{p} = -p$，所以第四个参数又是 p：圆在 P 处与抛物线相切。这是必然的，因为圆在该处的半径正沿着法线方向。像这样按重数（multiplicity）计算交点数目，正是代数几何（algebraic geometry）的起点（贝祖定理（Bézout's theorem））。如想做更多这类风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶难题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。