详细解答

STEP II 2017，第 4 题

纯数学 • 柯西–施瓦兹积分不等式

> **STEP II 2017，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q4

关键思路

施瓦茨不等式（Schwarz inequality）以平方的积分 $\int f^2$ 和 $\int g^2$ 为乘积的积分 $\int fg$ 提供一个上界（upper bound）。因此，整个技巧在于选取 f 和 g，使得每一个积分都能算出来，唯一可能例外的就是我们想估计的那一个。如果想估计的积分是 $\int fg$，我们得到的是上界；如果它是 $\int f^2$ 或 $\int g^2$，两边相除后得到的便是下界（lower bound）。

解答

以下一律把 $(*)$ 写成 $\left(\int fg\right)^2 \le \int f^2 \cdot \int g^2$。

第 (i) 部分

目标式中含有 e^t，所以取 $f(x) = 1$、$g(x) = \mathrm{e}^x$、$a = 0$ 及 $b = t$。于是

$$\int_0^t \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t - 1, \qquad \int_0^t 1 \,\mathrm{d}x = t, \qquad \int_0^t \mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2t} - 1),$$

因此 $(*)$ 给出

$$(\mathrm{e}^t - 1)^2 \le \frac{t}{2}\,(\mathrm{e}^{2t} - 1) = \frac{t}{2}\,(\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^t + 1).$$

由于 $t > 0$，有 $\mathrm{e}^t - 1 > 0$，而且 $\mathrm{e}^t + 1 > 0$。除以正数 $(\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^t + 1)$ 不会改变不等号的方向：

$$\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1} \le \frac{t}{2},$$

得证。

第 (ii) 部分

我们希望 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$ 以 $\int g^2$ 的形式出现，所以在 $[0,1]$ 上取 $g(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$ 及 $f(x)=x$。乘积 $x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$ 正是我们能够积分的那一类（指数外面的 x 幂，在相差一个常数的意义下，正是指数的导数）：

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\right]_0^1=2(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}),\qquad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

因此 $(*)$ 给出

$$4(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}})^2\le\frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x,$$

两边乘以 3，得

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x\ge 12(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}})^2.$$

第 (iii) 部分

记 $J=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$。这里所有积分都在 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上进行，该区间内 $\sin x\ge 0$ 且 $\cos x\ge 0$，所以所有根式都是实数。

上界。这里 J 应当是 $\int fg$。取 $f(x)=1$ 及 $g(x)=\sqrt{\sin x}$，使得 $g^2=\sin x$ 容易积分：

$$J^2\le\int_0^{\frac{1}{2}\pi}1\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot 1.$$

由于 $J>0$，取正平方根得 $J\le\sqrt{\pi/2}$。

下界。现在 J 必须是其中一个平方的积分，所以取 $f(x)=(\sin x)^{1/4}$，使得 $f^2=\sqrt{\sin x}$。

> ? **想一想** 哪一个 g 能使 $\int fg$ 和 $\int g^2$ 都可以算出来?

我们需要 g^2 容易积分，同时 $(\sin x)^{1/4}g(x)$ 也容易积分。选取 $g(x)=\cos x$ 两者兼顾：$(\sin x)^{1/4}\cos x$ 是 $\sin x$ 的幂乘以它的导数。答案的形式也是一条线索：分母中的 π 暗示 $\int g^2=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$。事实上

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{1/4}\cos x\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{4}{5}(\sin x)^{5/4}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{4}{5}$$

以及

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

因此 $(*)$ 给出

$$\frac{16}{25}\le J\cdot\frac{\pi}{4},\qquad \text{即}\qquad J\ge\frac{64}{25\pi}.$$

把两部分合起来，

$$\frac{64}{25\pi} \le \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

附注。其他选取方法也行得通，有些效果更好。取 $f=(\sin x)^{1/4}$、$g=(\sin x)^{3/4}$，得 $1 \le J\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$；再以 $f=\sin x$、$g=\sqrt{\sin x}$ 第二次应用 $(*)$，可证 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\pi/4}$。两者结合，得到更精确的下界 $J \ge 2/\sqrt{\pi} \approx 1.128$。

验算

- (i)：当 $t \to 0$ 时，左边是 $\tanh(t/2) \approx t/2$，所以对于细小的 t，这个界是紧的。当 t 很大时，左边趋于 1，而 $t/2$ 则无限增大。
- (ii)：$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0.8556$，而 $12(1-\mathrm{e}^{-1/4})^2 \approx 0.5871$。
- (iii)：数值上 $J \approx 1.1981$，介乎 $64/(25\pi) \approx 0.8149$ 与 $\sqrt{\pi/2} \approx 1.2533$ 之间。上界相当接近，因为 $\sqrt{\sin x}$ 在区间的大部分范围内都颇为平坦（接近 1），而取 $f=1$ 时，施瓦茨不等式取等号当且仅当 g 是常数。

常见错误

- 弄错界的方向。若未知积分是 $\int fg$，施瓦茨不等式只能给出它的上界，所以要得到下界，未知积分必须是 $\int f^2$ 或 $\int g^2$。
- 在 (i) 中除以 e^t-1 时没有说明它是正数。
- 在 (iii) 的上界中，忘记利用 $J>0$ 取正平方根。

STEP 之外

施瓦茨（柯西－施瓦茨，Cauchy–Schwarz）不等式指出，内积（inner product）$\langle f,g\rangle = \int fg$ 满足 $|\langle f,g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|$，且等号成立当且仅当 f 与 g 成比例。它在每一个内积空间（inner product space）中都成立，由 $\mathbb{R}^n$ 中的向量到函数空间皆然；正是它使“两个函数之间的夹角”这个概念有意义。这个想法是傅里叶级数（Fourier series）和最小二乘逼近（least-squares approximation）的基础。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）阐述了内积与正交性（orthogonality），而 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）则展示了如何运用这类不等式来控制积分。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。