详细解答

STEP II 2017，第 3 题

纯数学 · 曲线描绘

STEP II 2017，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s2-q3

关键思路

方程 $\sin y = k$ 从来不会只有一个解：若 y_0 是一个解，则 $\pi - y_0$ 也是，而与这两者相差 2π 的任何值亦是。因此这里每一幅草图，都是同一条基本曲线的几个复本，按正弦函数的对称性（symmetry）摆放而成。第 (i) 部分用直线展示这个规律；在 (ii) 中，微积分确定了基本部分 $y = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$ 的形状，其余的交由对称性完成。第 (iii) 部分则是把 $\cos y$ 写成正弦之后，再做一次 (ii)。

解答

第 (i) 部分

$\sin y = \sin x$ 成立，当且仅当

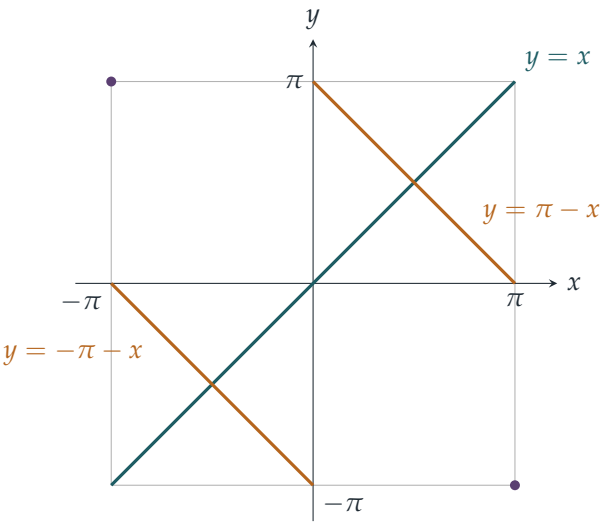
$$y = x + 2k\pi \qquad \text{或} \qquad y = \pi - x + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

现在看看这些直线中哪些与正方形 $-\pi \le x, y \le \pi$ 相交。

- $y = x$ 贯穿整条对角线，由 $(-\pi, -\pi)$ 至 (π, π)。
- $y = x \pm 2\pi$ 要求 $y - x = \pm 2\pi$。在正方形内，$|y - x| \le 2\pi$，且等号只在角点成立，所以这两条直线只给出两个孤立点 $(-\pi, \pi)$ 和 $(\pi, -\pi)$。
- $x + y = \pi$ 是由 $(0, \pi)$ 至 $(\pi, 0)$ 的线段，而 $x + y = -\pi$（即 $k = -1$ 的情况）是由 $(-\pi, 0)$ 至 $(0, -\pi)$ 的线段。
- $x + y = 3\pi$ 或 -3π 都不可能，因为 $|x + y| \le 2\pi$。

所以这个集合由对角线 $y = x$、$x + y = \pm\pi$ 的两条线段，以及两个角点 $(-\pi, \pi)$ 和

$(\pi, -\pi)$ 组成。



孤立的角点很容易被遗漏。它们确实是解，因为 $\sin(\pm\pi) = 0$。

第 (ii) 部分

对 $\sin y = \frac{1}{2}\sin x$ 进行隐函数微分（implicit differentiation），得 $y' \cos y = \frac{1}{2}\cos x$。当 $0 \le y \le \frac{1}{2}\pi$ 时，$\cos y \ge 0$，所以

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x},$$

它永远不为零。因此

$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}.$$

设 $s = \sin x$。利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{4 - s^2} = \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}$，由商法则（quotient rule）得

$$y'' = \frac{-\sin x\sqrt{4 - s^2} - \cos x \cdot \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}}{4 - s^2} = \frac{-s(4 - s^2) + s\cos^2 x}{(4 - s^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{s\left(-4 + s^2 + 1 - s^2\right)}{(4 - s^2)^{3/2}} = -\frac{3\sin x}{(4 - \sin^2 x)^{3/2}},$$

其中用了 $\cos^2 x = 1 - s^2$。这就是所求的结果。

基本部分。在这个四分之一正方形内，曲线是 $y = f(x)$，其中 $f(x) = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$。它由 $(0, 0)$ 出发，终于 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$，因为 $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$，所以它从不接近上边 $y = \frac{1}{2}\pi$。它在原点的斜率是 $\frac{1}{2}$，到 $x = \frac{1}{2}\pi$ 时降至 0。此外，当 $0 < x \le \frac{1}{2}\pi$ 时 $y'' < 0$，而在 $x = 0$ 时 $y'' = 0$，所以曲线是上凸（concave）且递增的，并在原点有一个拐点（point of inflection）。

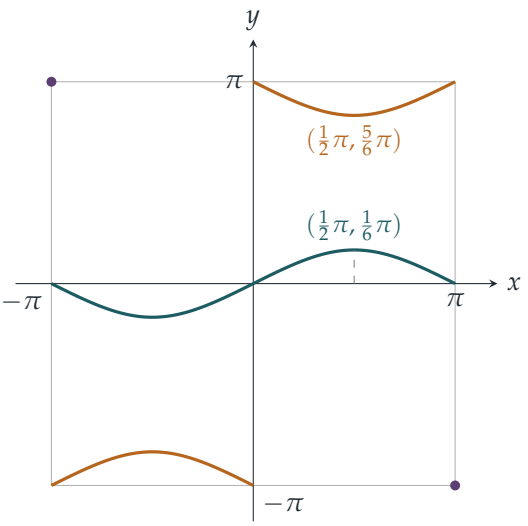
想一想 不再做任何微积分，怎样由这一小段弧得出整个正方形内的图像?

我们利用对称性。由于 $\sin(\pi - x) = \sin x$，而且 f 是奇函数 (odd function)，$y = f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图像关于 $x = \frac{1}{2}\pi$ 对称，并且关于原点有旋转对称 (rotational symmetry)。它是一条平缓的波，经过 $(-\pi, 0)$、$(0, 0)$ 和 $(\pi, 0)$，最大点为 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$，最小点为 $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{6}\pi)$。它在原点的斜率是 $\frac{1}{2}$，在 $x = \pm\pi$ 的斜率是 $-\frac{1}{2}$。

与 (i) 一样，完整的解集由 $y = f(x) + 2k\pi$ 或 $y = \pi - f(x) + 2k\pi$ 给出。在正方形内剩下:

- 对所有 $-\pi \le x \le \pi$ 的波 $y = f(x)$;
- $y = \pi - f(x)$，它只在 $f(x) \ge 0$ 之处，即 $0 \le x \le \pi$ 时，位于正方形内。这是一条由 $(0, \pi)$ 垂到 (π, π) 的拱形，最低点为 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$;
- $y = -\pi - f(x)$，它只在 $f(x) \le 0$ 之处，即 $-\pi \le x \le 0$ 时，位于正方形内。这是一条由 $(-\pi, -\pi)$ 拱起至 $(0, -\pi)$ 的拱形，最高点为 $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{5}{6}\pi)$;
- 孤立的角点 $(-\pi, \pi)$ 和 $(\pi, -\pi)$，分别来自 $x = -\pi$ 时的 $y = \pi - f(x)$ 和 $x = \pi$ 时的 $y = -\pi - f(x)$。

k 的其他值都给出 $|y| > \pi$。拱形以斜率 $\pm\frac{1}{2}$ 与直线 $y = \pm\pi$ 相交，它们是那条波旋转半周后再向上或向下平移所得。与 (i) 比较：对角线被压平成波，两条线段则弯成了拱形。



第 (iii) 部分

? **想一想** 怎样把 $\cos y$ 变成我们已经画过的东西?

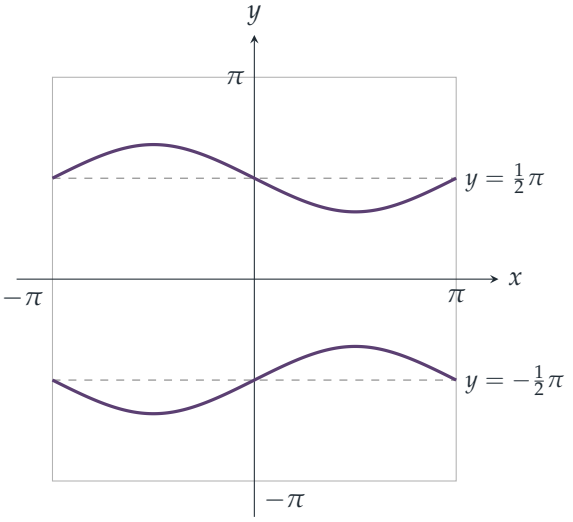
写 $\cos y = \sin(\frac{1}{2}\pi - y)$。于是 $\cos y = \frac{1}{2}\sin x$ 表示 $u = \frac{1}{2}\pi - y$ 满足 $\sin u = \frac{1}{2}\sin x$，所以 $u = f(x) + 2k\pi$ 或 $u = \pi - f(x) + 2k\pi$。即是

$$y = \tfrac{1}{2}\pi - f(x) - 2k\pi \qquad 或 \qquad y = f(x) - \tfrac{1}{2}\pi - 2k\pi.$$

由于 $|f(x)| \le \frac{1}{6}\pi$，只有 $k = 0$ 给出在 $[-\pi, \pi]$ 内的值，而且对每一个 x 都如此。所以这个集合恰好由两条完整的波组成：

- $y = f(x) - \frac{1}{2}\pi$：把 (ii) 的波向下平移 $\frac{1}{2}\pi$，在 $-\frac{2}{3}\pi$ 与 $-\frac{1}{3}\pi$ 之间振荡；
- $y = \frac{1}{2}\pi - f(x)$：它在 x 轴中的镜像（这是必然的，因为 $\cos y$ 是 y 的偶函数）。它的最小点为 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$，最大点为 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi)$。

这次没有孤立点。



验算

- 取样点：$(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ 给出 $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\pi$，而 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ 亦成立。在 (iii) 中，$(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ 给出 $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$。
- 在 $x = 0$，公式给出 $y' = \frac{1}{2}$，与小角近似（small-angle approximation）$y \approx \frac{1}{2}x$ 吻合。在 $x = \frac{1}{2}\pi$，公式给出 $y' = 0$，在最大点理应如此。

- 我们用电脑以有限差分（finite differences）在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 内的随机点验证了 y' 和 y'' 的公式。电脑亦对许多随机的 x 求出所有解 $y \in [-\pi, \pi]$，结果与上述各分支（branches）相符：在 (ii) 中当 $x \neq 0, \pm\pi$ 时有两个解，在 (iii) 中则总是有两个解。

常见错误

- 在 (i) 和 (ii) 中遗漏角点 $(-\pi, \pi)$ 和 $(\pi, -\pi)$。
- 在 (ii) 中把拱形画满整个 $[-\pi, \pi]$：一旦 $f(x) < 0$，$y = \pi - f(x)$ 便离开正方形。
- 取 $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x}$：符号已由 $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$ 确定。

STEP 之外

形如 $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ 的集合称为水平集（level set）。隐函数定理（implicit function theorem）指出，凡 $\partial F/\partial y \neq 0$ 之处，它在局部都是一个光滑的函数图像。在这里，这条件恰好在 $\cos y = 0$ 之处失效；而由于当 $|\sin y| \leq \frac{1}{2}$ 时这永远不会发生，(ii) 中的曲线都是关于 x 的光滑图像。在 (i) 中，交叉点正是 $\sin y - \sin x$ 的两个偏导数（partial derivatives）同时为零之处，而水平集亦正是在这些点上不再是一条曲线。Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）建立了单变量的基础；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）则是一本生动的辅助读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。