详细解答

STEP II 2017，第 2 题

纯数学 · 周期数列

STEP II 2017，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s2-q2

关键思路

把映射与自身复合并化简：递推关系（recurrence relation）走两步，得到的是另一个形状完全相同的“一次式除以一次式”映射，所以走四步其实就是把“走两步”再做两次。每当我们问 $x_{n+k} = x_n$ 是否成立时，消去分母都会得到一条关于 x_n 的二次方程，而这条二次式可以因式分解（factorise）。其中一个因式总是 $x^2 + (b-a)x + 1$，它的根正好就是递推关系的*不动点*（fixed points），即令数列成为常数数列的那些值。看出这一点，两部分便都迎刃而解。

解答

记 $f(x) = \dfrac{ax-1}{x+b}$，使得 $x_{n+1} = f(x_n)$。于是

$$x_{n+2} = \frac{a\dfrac{ax_n-1}{x_n+b} - 1}{\dfrac{ax_n-1}{x_n+b} + b}.$$

分子分母同乘以 $x_n + b$（按假设不为零），得

$$x_{n+2} = \frac{a(ax_n-1) - (x_n+b)}{(ax_n-1) + b(x_n+b)} = \boxed{\frac{(a^2-1)x_n - (a+b)}{(a+b)x_n + b^2 - 1}}$$

现在值得多记下一个事实。一个值 x 是不动点（$f(x) = x$）当且仅当 $ax - 1 = x^2 + bx$，即

$$q(x) \equiv x^2 + (b-a)x + 1 = 0. \qquad (*)$$

若 x_0 是 q 的根，则 $x_1 = x_0$，如此类推：数列是常数数列，周期（period）为 1。

第 (i) 部分

假设数列的周期为 2。那么特别地 $x_2 = x_0$。在 x_{n+2} 的公式中代入 $x = x_0$ 并消去分母，

$$\begin{aligned} 0 &= (a^2-1)x - (a+b) - x[(a+b)x + b^2 - 1] \\ &= -(a+b)x^2 + (a^2-b^2)x - (a+b) \\ &= -(a+b)[x^2 + (b-a)x + 1], \end{aligned}$$

这里用了 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$。所以 $(a+b)\,q(x_0) = 0$。

> **想一想** 为甚么不能以“$q(x_0) = 0$ 只对应 x_0 的一个值”作结?

因为 x_0 只是一个数，没有任何东西阻止它是 q 的根。真正排除这种情况的是 $(*)$ 的含义：若 $q(x_0) = 0$，则 x_0 是不动点，所以 $x_1 = x_0$，并且对所有 n 都有 $x_{n+1} = x_n$。这是周期 1，而周期 2 的定义不容许这种情况（取 $m = 1$）。因此 $q(x_0) \neq 0$，从而

$$a + b = 0$$

是周期 2 的必要条件。

（反过来，若 $b = -a$，两步公式便简化为 $x_{n+2} = \dfrac{(a^2-1)x_n}{a^2-1} = x_n$。这里不可能出现 $a^2 = 1$ 的情况，因为当 $a = 1$、$b = -1$ 时 $x_1 = 1$，当 $a = -1$、$b = 1$ 时 $x_1 = -1$；无论哪种情况都有 $x_1 + b = 0$，而这是被排除的。）

第 (ii) 部分

记 $A = a^2 - 1$、$B = b^2 - 1$ 及 $c = a + b$，使得 $x_{n+2} = g(x_n)$，其中 $g(x) = \dfrac{Ax - c}{cx + B}$。把 g 作用两次，并再次将分子分母同乘以 $cx + B$，

$$x_{n+4} = \frac{A(Ax_n - c) - c(cx_n + B)}{c(Ax_n - c) + B(cx_n + B)} = \frac{(A^2 - c^2)x_n - c(A+B)}{c(A+B)x_n + B^2 - c^2}.$$

那么 $x_{n+4} = x_n$ 成立当且仅当

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2-c^2)x_n - c(A+B) - x_n[c(A+B)x_n + B^2 - c^2] \\ &= -c(A+B)x_n^2 + (A^2 - B^2)x_n - c(A+B) \\ &= -(A+B)[c\,x_n^2 + (B-A)x_n + c]. \end{aligned}$$

由于 $B - A = b^2 - a^2 = (b-a)(a+b) = (b-a)c$，方括号内的式子等于 $c\,q(x_n)$，所以

$$x_{n+4} = x_n \iff (a^2 + b^2 - 2)\,(a+b)\,q(x_n) = 0.$$

必要性。假设周期为 4。数列不是常数数列，所以 x_0 不是不动点，$q(x_0) \neq 0$。若 $a + b = 0$，则由第 (i) 部分的逆命题得 $x_2 = x_0$，而且实际上对所有 n 都有 $x_{n+2} = x_n$，与周期 4 矛

盾。所以 $a+b\neq 0$，于是取 $n=0$ 时的因式分解迫使

$$a^2+b^2=2.$$

充分性。假设 $a^2+b^2=2$。那么 $A+B=0$，所以对每个 n 都有 $x_{n+4}=x_n$。我们必须验证没有更小的 m 能成立。

- $a+b\neq 0$：否则 $a^2=b^2=1$，并如第 (i) 部分所述，$x_1+b=0$，而这是被排除的。
- 没有实数不动点：q 的判别式（discriminant）是 $(b-a)^2-4=(a^2+b^2)-2ab-4=-2(1+ab)$，而 $|ab|\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)=1$，且只有当 $(a,b)=\pm(1,-1)$ 时才有 $ab=-1$，这情况我们刚刚已经排除。所以 $ab>-1$，判别式为负，对每个实数 x_n 都有 $q(x_n)\neq 0$。因此 $m=1$ 不成立。
- $m=2$：由第 (i) 部分，$x_2=x_0$ 需要 $(a+b)q(x_0)=0$，但这是错的。所以 $m=2$ 不成立。
- $m=3$：若对所有 n 都有 $x_{n+3}=x_n$，则对所有 n 都有 $x_{n+1}=x_{(n+1)+3}=x_{n+4}=x_n$，得出周期 1，而这我们刚刚已经排除。

因此，对实数 a、b 及 x_0（分母均不为零，如题目所容许），数列的周期为 4 当且仅当

$$\boxed{a^2+b^2=2.}$$

起始值 x_0 在这个条件中不起任何作用。

验算

取 $a=\sqrt{2}$、$b=0$ 及 $x_0=1$。数列依次为

$$1,\quad \sqrt{2}-1,\quad -1,\quad \sqrt{2}+1,\quad 1,\ \ldots$$

其周期恰好为 4。例如 $f(-1)=(-\sqrt{2}-1)/(-1)=\sqrt{2}+1$。电脑验算以数以千计的随机有理数 a、b、x_0 确认了两步及四步公式完全正确。它亦对圆 $a^2+b^2=2$ 上约二千个随机点确认了周期为 4，而对不在该圆上的随机 (a,b)，则发现四步之后都没有回到起点。

常见错误

- 由 $(a+b)q(x_0)=0$ 推出 $a+b=0$，却没有解释为甚么 $q(x_0)\neq 0$。不动点的诠释正是个中原因。
- 给出 $a^2+b^2=2$ 作为周期 4 的答案，却没有验证周期其实不是 1 或 2。
- 在第 (ii) 部分的方括号中遗漏了因式 $a+b$，以致周期 2 的情况 $a+b=0$ 被错误地看成给出周期 4。

STEP 之外

形如 $x \mapsto \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ 的映射是一个莫比乌斯变换（Möbius transformation）。复合两个这样的映射，相当于把它们对应的 2×2 矩阵相乘，在这里该矩阵为 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$。映射的周期为 k 当且仅当矩阵的 k 次幂是单位矩阵（identity matrix）的倍数，而这由比值 $(\text{迹})^2/\det = (a+b)^2/(ab+1)$ 决定。周期 4 对应于值 2，其实是一个乔装了的“旋转 $\pi/4$”。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）有精彩的一章讲述莫比乌斯变换，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）则涵盖了其背后的特征值（eigenvalue）概念。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。