详细解答

STEP II 2017，第 13 题

概率与统计 · 期望值与无穷级数

> **STEP II 2017，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q13

关键思路

无论哪一种情况，门在第 k 次尝试时打开，当且仅当前 $k-1$ 次尝试都失败而第 k 次成功，所以所求概率是若干个“失败”因子乘以一个“成功”因子。各种情况之间的分别，只在于每次抽取时袋中有多少条钥匙。把概率写出来之后，期望值（expectation）就是一些求和：(i) 是一个经微分的等比级数（geometric series），(ii) 是一个等差级数（arithmetic series），而 (iii) 则是一个裂项相消（telescoping）的和，最后剩下调和级数（harmonic series）的一部分。

解答

全文中，设 X 为门被打开时的尝试次数，并设 $q = 1 - \frac{1}{n}$。

第 (i) 部分

每次都从装有全部 n 条钥匙的袋中抽取；由于钥匙会放回，每次抽取与之前的抽取互相独立（independent）。因此每次尝试成功的概率都是 $\frac{1}{n}$，而

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1} \cdot \frac{1}{n}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

由二项展开（binomial expansion），因 $0 < q < 1$ 而成立，

$$(1-q)^{-2} = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}.$$

因此

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1-q)^{-2} = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n.$$

尝试次数的期望值是 n。

第 (ii) 部分

现在每次失败后，袋中就少了一条错误的钥匙，所以第 j 次尝试时袋中有 $n-j+1$ 条钥匙。要门在第 k 次尝试时打开，需要先失败 $k-1$ 次，然后成功一次：

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n},$$

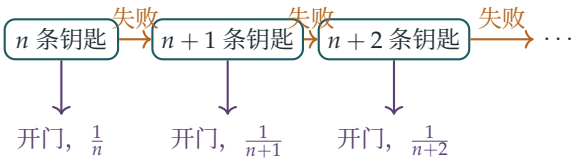
因为这个乘积会逐项相消。（这一点也可以直接看出：逐条不放回地抽出钥匙，正确的钥匙在 n 个位置中的位置是均匀随机的。）所以 X 在 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上服从均匀分布（uniform distribution），而

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

第 (iii) 部分

概率。 袋中起初有 n 条钥匙，每次失败后就多加一条错误的钥匙，而袋中始终恰好有一条正确的钥匙。所以第 j 次尝试时袋中有 $n+j-1$ 条钥匙，而

$$\mathrm{P}(\text{第}j\text{ 次尝试失败}\mid\text{之前的尝试均失败})=\frac{n+j-2}{n+j-1}.$$



把 $k-1$ 次失败及其后一次成功的条件概率（conditional probability）相乘，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=k)&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdots\frac{n+k-3}{n+k-2}\cdot\frac{1}{n+k-1}\\&=\frac{n-1}{n+k-2}\cdot\frac{1}{n+k-1}=\frac{n-1}{(n+k-1)(n+k-2)},\end{aligned}$$

因为每个分子都与前一个分母相消，只剩下第一个分子 $n-1$ 和最后一个失败因子的分母 $n+k-2$。当 $k=1$ 时没有失败因子，而公式给出 $\frac{n-1}{n(n-1)}=\frac{1}{n}$，与预期相符。这就是所求的结果。

门一定会打开。 在计算平均值之前,值得先验证 X 以概率 1 为有限。由于 $\dfrac{n-1}{(n+k-1)(n+k-2)} = (n-1)\left(\dfrac{1}{n+k-2} - \dfrac{1}{n+k-1}\right)$，这个和会裂项相消:

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(X=k) = (n-1)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+N-1}\right) \to 1 \quad \text{当} N \to \infty.$$

期望值。 我们需要求 $\sum k\,\mathrm{P}(X=k)$,所以把 $\dfrac{k}{(n+k-1)(n+k-2)}$ 拆成部分分式(partial fractions)。设

$$k = A(n+k-2) + B(n+k-1)$$

代入 $k = 1-n$ 得 $1-n = -A$，所以 $A = n-1$；代入 $k = 2-n$ 得 $B = 2-n$。因此

$$k\,\mathrm{P}(X=k) = (n-1)\left(\frac{n-1}{n+k-1} - \frac{n-2}{n+k-2}\right).$$

想一想 这个式子不能干净地裂项相消，因为系数 $n-1$ 和 $n-2$ 并不相同。那么剩下来的是甚么?

设 S_N 为首 N 项之和。第一个分数的分母取遍 $m = n, \ldots, n+N-1$；第二个分数的分母则取遍 $m = n-1, \ldots, n+N-2$。在共同范围 $m = n, \ldots, n+N-2$ 上，每个 $\frac{1}{m}$ 的系数都是 $(n-1)-(n-2) = 1$，而两端则剩了下来:

$$S_N = (n-1)\left(\sum_{m=n}^{n+N-2} \frac{1}{m} + \frac{n-1}{n+N-1} - \frac{n-2}{n-1}\right).$$

最后两项是有界的（中间一项为正，最后一项是一个固定的数），而

$$\sum_{m=n}^{n+N-2} \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{n+N-2} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \to \infty$$

当 $N \to \infty$ 时成立，因为调和级数发散（diverges），而我们只减去一个固定的有限值。由于 $n-1 > 0$，所以 $S_N \to \infty$。所有项 $k\,\mathrm{P}(X=k)$ 都是正数，因此定义 $\mathrm{E}(X)$ 的级数发散至无穷：尝试次数的期望值是无穷大，尽管门最终必定会打开。

验算

- 当 $n = 2$ 时，三个答案分别是 2、$\frac{3}{2}$ 和 ∞。第二种情况效率最高，这是理所当然的，因为它从不重试同一条钥匙；第一种情况则介乎两者之间。
- 在 (iii) 中取 $n = 3$，公式对 $k = 1, 2, 3$ 给出 $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}$；直接计算则得 $\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$ 和 $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$。以电脑模拟 2×10^5 局，得到的频率为 0.334、0.168 和 0.099。

- 同样取 $n = 3$，当 $N = 10^4$ 时部分和 S_N 约为 15.6，而且它会像 $2\ln N$ 般不断增长：并没有极限。

常见错误

- 在 (iii) 中，把第 k 次尝试时袋中钥匙的数目当作 $n + k$ 而不是 $n + k - 1$：在第 k 次抽取之前，只加入了 $k - 1$ 条钥匙。
- 因为平均值是无穷大，就断定门可能永远打不开。各概率之和为 1；只是其尾部像 $1/k^2$ 般衰减，太“重”了，令 $\sum k\,\mathrm{P}(X = k)$ 无法收敛。
- 把部分分式当作两个系数相等般裂项相消，因而得出一个有限的答案。

STEP 之外

第三种情况给出一个以概率 1 为有限、但平均值为无穷大的随机变量（random variable），原因是 $\mathrm{P}(X = k)$ 的表现像 $1/k^2$。像这样的重尾分布（heavy-tailed distribution），以及著名的圣彼得堡悖论（St Petersburg paradox），说明了为何大学一年级的概率课程坚持：只有当 $\sum k\,\mathrm{P}(X = k)$ 收敛时，$\mathrm{E}(X)$ 才存在。每次失败后多加一条错误钥匙的袋子，与波利亚（Pólya）罐子模型是近亲；后者是描述“富者愈富”过程的标准模型。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）讲述了离散随机变量的期望值以及这些微妙之处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。