详细解答

STEP II 2017，第 12 题

概率与统计 · 泊松过程

> **STEP II 2017，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q12

关键思路

两条互相独立（independent）的泊松（Poisson）鱼流合并后，成为一条单一的泊松鱼流，其速率为两个速率之和；这正是第 (i) 部分中的卷积（convolution）所显示的。至于有关时间的问题，要把关于第一条鱼何时上钓的陈述，转化为关于钓到多少条鱼的陈述：“亚当的第一条鱼在时间 t 之后才上钓”的意思恰恰就是“亚当在 $[0,t]$ 内没有钓到任何鱼”，而泊松公式可以直接给出这个概率。

解答

全文中，X 和 Y 分别是亚当和夏娃在长度为 T 的时段内钓到的鱼的数目，因此 $X \sim \mathrm{Po}(\lambda T)$ 及 $Y \sim \mathrm{Po}(\mu T)$，两者互相独立。

第 (i) 部分

对整数 $r \geq 0$，事件 $X+Y=r$ 可分拆为互斥事件 $\{X=j,\ Y=r-j\}$，其中 $j=0,1,\ldots,r$。利用独立性，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X+Y=r) &= \sum_{j=0}^{r} \mathrm{P}(X=j)\,\mathrm{P}(Y=r-j) = \sum_{j=0}^{r} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!} \cdot \frac{e^{-\mu T}(\mu T)^{r-j}}{(r-j)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)T}}{r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (\lambda T)^j (\mu T)^{r-j} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)T}((\lambda+\mu)T)^r}{r!},\end{aligned}$$

这里我们先乘以再除以 $r!$，然后运用二项式定理（binomial theorem）。这正是 $\mathrm{Po}((\lambda+\mu)T)$ 的概率，因此在时间 T 内的总渔获服从参数为 $(\lambda+\mu)T$ 的泊松分布。

第 (ii) 部分

对 $0 \le r \le k$,

$$\mathrm{P}(X = r \mid X+Y = k) = \frac{\mathrm{P}(X = r,\ Y = k-r)}{\mathrm{P}(X+Y=k)} = \frac{\dfrac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^r}{r!} \cdot \dfrac{e^{-\mu T}(\mu T)^{k-r}}{(k-r)!}}{\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)T}((\lambda+\mu)T)^k}{k!}},$$

其中分母用了第 (i) 部分的结果。指数项互相抵消，T 的幂也一样（分子有 $r+(k-r)=k$ 次，分母也有 k 次），剩下

$$\mathrm{P}(X = r \mid X+Y = k) = \binom{k}{r}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^r\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-r}.$$

所以，在总数为 k 的条件下，亚当的渔获服从 $\mathrm{B}(k,\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$。实际上，这 k 条鱼中的每一条，都各自独立地以概率 $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ 属于亚当。留意 T 已经消失了。

第 (iii) 部分

设 A 和 E 分别为亚当和夏娃钓到第一条鱼的时间，从开始时起计。亚当的第一条鱼在时间 t 之后才上钓，当且仅当他在 $[0,t]$ 内甚么也没钓到，因此

$$\mathrm{P}(A > t) = \mathrm{P}(\mathrm{Po}(\lambda t) = 0) = e^{-\lambda t}, \qquad \text{同理} \qquad \mathrm{P}(E > t) = e^{-\mu t}.$$

因此 A 的概率密度函数（probability density function）为 $\lambda e^{-\lambda t}$，其中 $t \ge 0$（把 $1 - e^{-\lambda t}$ 求导即得），而由于两人的渔获互相独立，A 和 E 也互相独立。

想一想 我们该如何把 A 的密度与 E 的概率结合起来?

以 A 的值为条件：若亚当的第一条鱼在时间 t 上钓，那么他领先恰恰就是 $E > t$ 的情况，由独立性可知其概率为 $e^{-\mu t}$。对所有 t 求和，

$$\mathrm{P}(A < E) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, e^{-\mu t}\,\mathrm{d}t = \lambda\left[\frac{-e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

（由于 E 服从连续分布，两人同时钓到的概率为零。）所以第一条鱼属于亚当的概率是 $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$，与第 (ii) 部分的二项分布参数相同。

第 (iv) 部分

我们要求 $\mathrm{E}(M)$，其中 $M = \max(A,E)$ 是两人都钓到鱼的时间。记 $m = \min(A,E)$，即两人之中任何一人钓到第一条鱼的时间。对任意两个数，max + min 等于它们的和，因此

$$M = A + E - m \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{E}(M) = \mathrm{E}(A) + \mathrm{E}(E) - \mathrm{E}(m).$$

$\mathrm{E}(A)$ 与 $\mathrm{E}(E)$。从开始时起计，亚当的渔获所构成的过程，与从任何一次钓到鱼的时刻起计的过程属同一类，因此他等待第一条鱼的期望（expectation）时间，与题目给出的期望间隔相同，即 $\mathrm{E}(A) = \lambda^{-1}$；同样 $\mathrm{E}(E) = \mu^{-1}$。（直接计算：利用分部积分（integration by parts），$\mathrm{E}(A) = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda^{-1}$。）

想一想 “两人之中任何一人钓到的第一条鱼”属于哪一类过程?

由第 (i) 部分，在任何长度为 t 的时段内，两人的合计渔获服从 $\mathrm{Po}((\lambda+\mu)t)$。所以合计渔获与亚当的渔获是完全同类的过程，只是速率由 λ 换成 $\lambda+\mu$，因此等待第一条鱼的期望时间为 $\mathrm{E}(m) = (\lambda+\mu)^{-1}$。（直接计算：$\mathrm{P}(m > t) = \mathrm{P}(A > t)\,\mathrm{P}(E > t) = e^{-(\lambda+\mu)t}$。）因此

$$\mathrm{E}(M) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{\lambda\mu(\lambda+\mu)}.$$

验算

- 若 $\lambda = \mu$，第 (iii) 部分给出 $\frac{1}{2}$，正如对称性（symmetry）所要求；第 (iv) 部分给出 $\frac{3}{2\lambda}$：先等 $\frac{1}{2\lambda}$ 得到第一条鱼，再根据同样的“重新开始”推理，另一人还要多等 $\frac{1}{\lambda}$。
- 若 $\mu \to \infty$（夏娃即时钓到鱼），第 (iv) 部分的答案趋向 $\frac{1}{\lambda}$，即亚当独自所需的时间。
- 第 (iv) 部分的答案至少为 $\max(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu})$，这是必然的，因为 $\frac{1}{\mu} > \frac{1}{\lambda+\mu}$。
- 取 $\lambda = 1.3$、$\mu = 0.7$，公式给出 0.65 和 1.6978；以电脑模拟 2×10^5 次钓鱼之旅，得到 0.651 和 1.700。

常见错误

- 在第 (iv) 部分，把 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ 相加，或取 $\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}\right)$：最大值的期望并非两者之一。
- 在第 (ii) 部分，忘记除以 $\mathrm{P}(X+Y=k)$，而正是这一步把联合概率（joint probability）变成条件概率（conditional probability）。

STEP 之外

你在这里遇到的是泊松过程（Poisson process）：事件之间的等待时间服从指数分布，并具有无记忆性（memoryless）；互相独立的泊松过程叠加（superpose）后成为另一个泊松过程；而每个事件都独立地以与其速率成正比的概率被标记（反方向的操作，即“稀疏化”（thinning），同样成立）。这些事实是排队论（queueing theory）和连续时间马可夫链（continuous-time Markov chains）的基础。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability:*

An Introduction（《概率导论》）对泊松过程和指数分布（exponential distribution）的处理，正好可以作为这道题目的自然延续。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。