详细解答

STEP II 2017，第 11 题

力学 · 抛体与能量

STEP II 2017，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

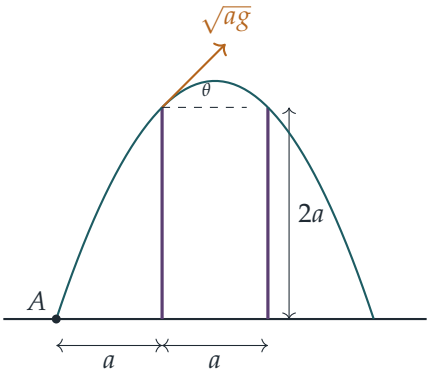
step.maths.org/questions/17-s2-q11

关键思路

当质点升到与第一道墙顶同高时，余下的飞行就是一道全新的抛射体（projectile）问题：它从高度 $2a$ 出发，速率已知，而在水平距离 a 之后，高度仍须至少为 $2a$。利用能量（energy）可以在不知道抛射角的情况下求出这个速率。把轨迹（trajectory）以 $\tan\theta$ 表示，就能把“它能否越过第二道墙?”转化为“一个关于 $\tan\theta$ 的二次方程（quadratic equation）是否有实根?”，这样两个部分便可一并处理。

解答

把每个质点视为只受重力作用、自由运动的质点（point mass），不计空气阻力（air resistance）。取 x 为水平方向（朝向墙的一方），y 为铅直向上。



第 (i) 部分

越过第一道墙时的速率。只有重力做功，所以动能（kinetic energy）与势能（potential energy）之和保持不变。质点从地面升至高度 $2a$，设它在墙顶时的速率为 v，则

$$\tfrac{1}{2}m(5ag) = \tfrac{1}{2}mv^2 + mg(2a) \quad \Longrightarrow \quad v^2 = 5ag - 4ag = ag,$$

因此质点以速率 $\sqrt{ag}$ 越过第一道墙。

角度。设质点越过第一道墙时，速度与水平方向成仰角 θ；由于质点稍后（越过第二道墙时）会再次处于高度 $2a$，它此时必定仍在上升，所以 $\theta > 0$。以第一道墙顶为起点量度：经过水平距离 X 后，质点高于墙顶水平的高度为

$$Y = X\tan\theta - \frac{gX^2}{2v^2\cos^2\theta} = X\tan\theta - \frac{X^2}{2a}\,(1+\tan^2\theta),$$

这里用了 $v^2 = ag$ 及 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$。恰好越过第二道墙，即在 $X = a$ 时 $Y = 0$：

$$a\tan\theta - \tfrac{a}{2}(1+\tan^2\theta) = 0 \iff \tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0 \iff (\tan\theta - 1)^2 = 0.$$

所以 $\tan\theta = 1$，$\theta = 45^\circ$，正如所求。（另一种说法：从高度 $2a$ 回到高度 $2a$，相当于在水平地面上的射程（range）为 $v^2\sin 2\theta/g = a\sin 2\theta$，而它只在 $\sin 2\theta = 1$ 时等于 a。）

A 的距离。速度的水平分量始终不变，在第一道墙上方时为 $\sqrt{ag}\cos 45^\circ = \sqrt{ag/2}$；该处的铅直分量同样是 $\sqrt{ag/2}$，方向向上。在 A 点，铅直分量 u 满足 $u^2 = \tfrac{1}{2}ag + 2g(2a) = \tfrac{9}{2}ag$，所以 $u = 3\sqrt{ag/2}$。（验算一下：$\tfrac{1}{2}ag + \tfrac{9}{2}ag = 5ag$，与发射速率吻合。）从 A 到第一道墙所需的时间为

$$t = \frac{u - \sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\sqrt{ag/2}}{g},$$

在这段时间内走过的水平距离为

$$\sqrt{\tfrac{ag}{2}}\cdot\frac{2\sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}ag}{g} = a.$$

因此 A 与第一道墙脚的距离为 a。

第 (ii) 部分

现在质点在高度 $2a + h$ 处越过第一道墙。由能量守恒，它在该处的速率 w 满足

$$w^2 = 5ag - 2g(2a + h) = g(a - 2h).$$

质点朝墙的方向运动，所以水平速度不为零，故 $w^2 > 0$；因此 $h < \tfrac{1}{2}a$。

设它在该处的运动方向与水平方向成角 ϕ，并记 $T = \tan\phi$。以质点在第一道墙上方的位置为起点量度，经过水平距离 X 后，它高于该点的高度为

$$Y = XT - \frac{gX^2}{2w^2}(1+T^2) = XT - kX^2(1+T^2)/a^2, \qquad \text{其中} k = \frac{ga^2}{2w^2} = \frac{a^2}{2(a-2h)}.$$

在第二道墙处 $X = a$，所以 $Y = aT - k(1+T^2)$。要越过这道墙，质点的高度须至少为 $2a$，即 $Y \geq -h$：

$$aT - k(1+T^2) + h \geq 0 \iff kT^2 - aT + (k-h) \leq 0.$$

想一想 我们不知道 ϕ 的值。怎样才能证明没有任何方向可行?

由于 $k > 0$，二次式 $kT^2 - aT + (k-h)$ 的图像开口向上。它只有在判别式（discriminant）非负时，才会对某个实数 T 取得 ≤ 0 的值。这个判别式为

$$\Delta = a^2 - 4k(k-h) = a^2 - \frac{a^4}{(a-2h)^2} + \frac{2a^2h}{a-2h}.$$

乘以正数 $(a-2h)^2/a^2$，得

$$\frac{(a-2h)^2}{a^2}\Delta = (a-2h)^2 - a^2 + 2h(a-2h) = -2ah.$$

由于 $a > 0$ 且 $h > 0$，此式为负，所以 $\Delta < 0$。于是对所有实数 T 都有 $kT^2 - aT + (k-h) > 0$；换言之，无论质点越过第一道墙时的方向如何，它到达第二道墙时的高度都低于 $2a$。它无法越过第二道墙。

留意 $h = 0$ 时 $\Delta = 0$，并得到重根（double root）$T = a/(2k) = 1$：这正是第 (i) 部分的 45°。

验算

- 在第 (i) 部分，A 点的速度分量为 $\sqrt{ag/2}$ 和 $3\sqrt{ag/2}$，两者平方之和为 $5ag$。取 $a = 1.7\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，从 A 点起逐步向前推算运动，得出质点在两道墙处的高度都是 $2.000a$。
- 轨迹关于最高点对称；在第 (i) 部分，最高点位于两墙正中，与 A 的水平距离为 $1.5a$。所以质点落在距 A 为 $3a$ 之处，即第二道墙之后距离 a 的地方：整幅图是对称的。
- 在第 (ii) 部分，用电脑以速率 $\sqrt{5ag}$ 检验了数以千计随机的发射角和发射点，没有一个既能在第一道墙上方经过，又能越过第二道墙。

常见错误

- 忘记第 (i) 部分的 θ 必须是越过第一道墙时的角度，而不是在 A 点的抛射角（后者满足 $\tan\alpha = 3$）。
- 在第 (ii) 部分只检验某一个特定角度（例如 45°）。题目的断言涉及所有可能的方向，所以才需要用判别式。

STEP 之外

第 (ii) 部分说明：从第一道墙上方的一点出发，具有这个能量的质点只能恰好到达第二道墙顶；换言之，该墙顶位于可到达范围的边界上。从某一给定点以给定速率出发可到达的所有点，都位于一条称为包络线（envelope）或安全抛物线（safety parabola）的抛物线之内，而抛物线上的点恰好只由一条轨迹到达，这就是这里所见的重根。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）以大学一年级程度讲解抛射体及能量方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。