详细解答

STEP II 2017，第 10 题

力学 • 克服阻力所作的功

STEP II 2017，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s2-q10

关键思路

牛顿第二定律（Newton's second law）给出每一点的驱动力（driving force），而引擎所做的功（work）就是这个力对距离的积分（integral）。在等加速度的情况下，$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a$ 可以把对 x 的积分转化为对 v 的积分。唯一微妙之处在于引擎只能推、不能拉：当所需的力变成负数时，便由煞车负责，引擎毫无贡献，所以我们只在驱动力为正的范围内积分。

解答

把汽车视为沿 x 轴运动的质点（particle），引擎提供的驱动力为 F。汽车向前行驶时，阻力（resistance）Av^2+R 向后作用。

前半段。 由牛顿第二定律得 $F-(Av^2+R)=ma$，所以

$$F=ma+R+Av^2,$$

它在整段过程中都是正数。力 F 使其作用点移动 $\mathrm{d}x$ 时所做的功为 $F\,\mathrm{d}x$，因此引擎在前半段所做的功为

$$\int_0^d (ma+R+Av^2)\,\mathrm{d}x,$$

正如所求。至于变量代换（change of variable），加速度为 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a$，所以 $\mathrm{d}x=\frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$。由于 $v^2=2ax$（由静止开始以等加速度运动），v 由 $x=0$ 时的 0 变到 $x=d$ 时的 $\sqrt{2ad}=w$。因此所做的功为

$$\int_0^w \frac{(ma+R+Av^2)\,v}{a}\,\mathrm{d}v,$$

正如所求。计算这个积分，并利用 $w^2 = 2ad$：

$$W_1 = \frac{1}{a}\left[\frac{(ma+R)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_0^w = \frac{(ma+R)w^2}{2a} + \frac{Aw^4}{4a} = (ma+R)d + Aad^2.$$

后半段。 此时加速度为 $-a$，所以 $F - (Av^2 + R) = -ma$，得

$$F = Av^2 + R - ma.$$

汽车由 w 减速至 0，其中 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -a$，所以 $\mathrm{d}x = -\frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$。在任何一段 $F > 0$、而速率由 v_1 降至 v_2（其中 $v_1 > v_2$）的路程上，引擎所做的功为

$$\int_{v_1}^{v_2} F\left(-\frac{v}{a}\right)\mathrm{d}v = \int_{v_2}^{v_1} \frac{(Av^2 + R - ma)\,v}{a}\,\mathrm{d}v. \qquad (*)$$

第 (i) 部分

若 $R > ma$，则对所有 v 皆有 $F = Av^2 + (R - ma) > 0$，所以引擎在整个后半段都在做功。由 $(*)$，取 $v_1 = w$、$v_2 = 0$：

$$W_2 = \frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_0^w = (R-ma)d + Aad^2.$$

两者相加，$ma\,d$ 项互相抵消，总功为

$$W_1 + W_2 = 2Aad^2 + 2Rd,$$

正如所求。

第 (ii) 部分

现在 $R < ma$，所以 $F = Av^2 - (ma - R)$ 恰好在以下情况等于零：

$$v = u, \qquad \text{其中} u^2 = \frac{ma - R}{A} > 0.$$

若 $u < w$，即 $\frac{ma-R}{A} < 2ad$，这个速率便真的会在后半段出现，而这正正就是条件 $R > ma - 2Aad$。因此，当汽车由 w 减速至 0 时，F 在 $v > u$ 时为正，在速率为 u 时降至零，而在 $v < u$ 时为负（煞车）。这就证明了第一个结论。

> ? **想一想** 为甚么不能直接沿用 (i) 的答案?

(i) 中的积分把整个后半段的 $F\,\mathrm{d}x$ 加起来。这里 F 在 $v < u$ 时为负，那一段会从总和中减去。但引擎在那里并不是做负功，而是甚么也没做，由煞车接手。所以我们在 $v = u$ 处

停止积分。由 $(*)$，取 $v_1 = w$、$v_2 = u$：

$$W_2 = \frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_u^w$$
$$= (R-ma)d + Aad^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{(R-ma)u^2}{2} + \frac{Au^4}{4}\right).$$

代入 $Au^2 = ma - R$，括号内的式子为

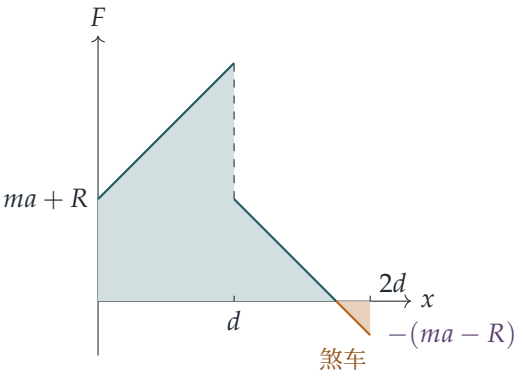
$$-\frac{(ma-R)^2}{2A} + \frac{(ma-R)^2}{4A} = -\frac{(ma-R)^2}{4A},$$

所以 $W_2 = (R-ma)d + Aad^2 + \frac{(ma-R)^2}{4Aa}$。前半段不变（那里 $F > 0$ 恒成立），所以总功为

$$W_1 + W_2 = 2Aad^2 + 2Rd + \frac{(ma-R)^2}{4Aa},$$

正如所求。

图解。 由于前半段 $v^2 = 2ax$，后半段 $v^2 = 2a(2d-x)$，F 在每一半都是 x 的线性函数（linear function），而引擎所做的功就是图像正值部分之下的面积。在情况 (ii) 中，图像在接近终点时跌到轴下方。缺去的三角形高为 $ma - R$；由于 F 每单位距离下降 $2Aa$，其底为 $\frac{ma-R}{2Aa}$。它的面积 $\frac{(ma-R)^2}{4Aa}$ 恰好就是那个额外的项。



验算

- 在边界 $R = ma$ 时，额外的项消失，所以 (i) 和 (ii) 的答案一致，这是理所当然的，因为此时 F 只在最后一刻才降至零。
- 在另一边界 $R = ma - 2Aad$ 时，我们有 $u = w$，引擎在后半段完全不做功，总功应为 $W_1 = (ma+R)d + Aad^2$。把 $ma - R = 2Aad$ 代入 (ii) 的答案，得 $2Aad^2 + 2Rd + Aad^2 = 2Rd + 3Aad^2$，而 $(ma+R)d + Aad^2 = 2Rd + 2Aad^2 + Aad^2$ 亦然，所以两者一致。

- 数值上，取 $m = a = 1$、$A = \frac{1}{2}$、$d = 2$、$R = \frac{1}{2}$（即上图所画的情况），(ii) 的公式给出 $4 + 2 + \frac{1}{8} = 6.125$，而直接对整段行程中 F 的正值部分作数值积分，亦得出相同的数值。
- 单位：Aad^2、Rd 和 $(ma - R)^2/(Aa)$ 都是力乘以距离，所以全都是能量。

常见错误

- 忘记后半段有 $\mathrm{d}x = -\frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$，这会使积分上下限对调；这里的正负号错误会令后半段的功变成负数。
- 在 (ii) 中把 F 的负值部分也积分进去，结果只会重复得出 (i) 的答案。
- 没有检查速率 u 是否真的在汽车停下之前出现：这正是 R 的下界所保证的。

STEP 之外

力所做的功是一个线积分（line integral）$\int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$，而这里所用的变量代换就是功能定理（work–energy theorem）的一维版本。像 Av^2 这类阻力并不是保守力（conservative force），所以所做的功取决于行程是怎样驾驶的，而不只取决于起点和终点。引擎这种“单向”的特性，让我们初步领略到最优控制（optimal control）问题中出现的约束，例如寻找行驶指定距离最省燃料的方法。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对功、能量及与速度有关的力有细致的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。