详细解答

STEP II 2017，第 1 题

纯数学 · 归约公式

STEP II 2017，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s2-q1

关键思路

被积函数（integrand）中难处理的部分是 $\arctan x$，但它的导数（derivative）是一个有理函数（rational function），所以用分部积分法（integration by parts），取 $u = \arctan x$，就能把它换成 $\frac{1}{1+x^2}$。接着，(ii) 的窍门是把两个积分配对，使分子合并成 $x^{n+1}(1+x^2)$，从而消去麻烦的分母。这样便得到一条令 n 每次增加 2 的递推公式（reduction formula）；用两次就令 n 增加 4，而这正是 (iii) 的归纳法（induction）所需要的。

解答

第 (i) 部分

用分部积分法，取 $u = \arctan x$ 及 $\mathrm{d}v = x^n\,\mathrm{d}x$，于是 $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$（由于 $n \geq 0$，这没有问题）：

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

这里用了 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$，以及边界项（boundary term）在 $x = 0$ 处为零这一事实。两边乘以 $n+1$，便得到所需结果：

$$(n+1)I_n = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

当 $n = 0$ 时，余下的积分是 $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$，所以

$$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

第 (ii) 部分

把 (i) 中的 n 换成 $n+2$，再与原本的 (i) 相加：

$$\begin{aligned}(n+3)I_{n+2}+(n+1)I_n &= \frac{\pi}{2}-\int_0^1 \frac{x^{n+3}+x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}-\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n+2},\end{aligned}$$

因为 $x^{n+3}+x^{n+1}=x^{n+1}(1+x^2)$。

> **想一想** 这条公式把 I_4 与 I_2 联系起来，又把 I_2 与 I_0 联系起来。我们需要哪些 n 值?

我们需要 $n=0$ 及 $n=2$：

$$\begin{aligned}n=0:&\quad 3I_2+I_0=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2},\\ n=2:&\quad 5I_4+3I_2=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

以第二式减去第一式，消去 I_2：

$$5I_4=I_0+\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2,\qquad \text{所以}\qquad I_4=\frac{\pi+1-2\ln 2}{20}.$$

第 (iii) 部分

为简便起见，记 $S_n=\sum_{r=1}^{2n}\frac{(-1)^r}{r}$。

求 A。当 $n=1$ 时，$S_1=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，所以命题变成 $5I_4=A+\frac{1}{4}$。由 (ii) 得 $5I_4=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$，因此必须取

$$A=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\ (=I_0),$$

而取这个值时，命题对 $n=1$ 成立。

归纳步骤。假设对某个 $k\geq 1$，有 $(4k+1)I_{4k}=A-\frac{1}{2}S_k$。我们要推到 I_{4k+4}，即用 (ii) 的公式走两步。分别取 $n=4k+2$ 及 $n=4k$，得

$$\begin{aligned}(4k+5)I_{4k+4}+(4k+3)I_{4k+2}&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4k+4},\\ (4k+3)I_{4k+2}+(4k+1)I_{4k}&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4k+2}.\end{aligned}$$

> **想一想** 怎样才能消去多余的 I_{4k+2}?

它在两条方程中的系数相同，所以以第一式减去第二式便可把它消去：

$$(4k+5)I_{4k+4} = (4k+1)I_{4k} + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

另一方面，S_{k+1} 比 S_k 多出两项，即 $r = 2k+1$（奇数，所以是负的）和 $r = 2k+2$（偶数，所以是正的）：

$$-\frac{1}{2}S_{k+1} = -\frac{1}{2}S_k - \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\Big) = -\frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

利用归纳假设（inductive hypothesis），

$$(4k+5)I_{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_{k+1},$$

这正是 $n = k+1$ 时的命题。由于命题对 $n = 1$ 成立，由归纳法可知它对所有 $n \geq 1$ 均成立，其中 $A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$。

验算

- 数值上，$I_0 \approx 0.438825$，$I_4 \approx 0.137765$；对原来的积分使用辛普森法则（Simpson's rule），结果在小数点后十位都吻合。
- A 等于 I_0，所以 (iii) 的公式对 $n = 0$ 也成立（此时和式是空和），这是个好兆头。
- 当 $n \to \infty$ 时，(i) 中的积分趋向 0（被积函数不超过 x^{n+1}），所以 $(4n+1)I_{4n} \to \frac{\pi}{4}$。同时 $S_n \to -\ln 2$，所以右方趋向 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4}$。两边在极限下吻合。

常见错误

- 写了 $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$，却忘了把第二个积分也除以 $n+1$。
- 弄错交错和中两个新项的正负号：$r = 2k+1$ 是奇数，所以 $(-1)^r = -1$。
- 未先由基本情况（base case）确定 A，就去证明归纳步骤。

STEP 之外

最后一项验算用到了交错调和级数（alternating harmonic series）$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$，而这道题实际上就证明了它：(iii) 的恒等式，加上 $(4n+1)I_{4n} \to \frac{\pi}{4}$ 这一事实，迫使部分和（partial sums）收敛（converge）到 $\ln 2$。利用像 $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 这类趋向零的积分来控制级数的误差，是一种标准方法，你在第一个数学分析（analysis）课程中便会遇到。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解数学分析》）浅白易读，是了解如何严格处理这类极限的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。