详细解答

STEP I 2017，第 9 题

力学 · 抛体运动

STEP I 2017，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

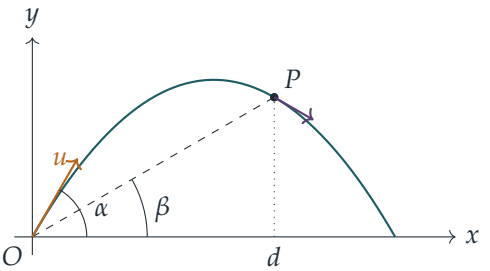
step.maths.org/questions/17-s1-q9

关键思路

先写出轨迹方程（trajectory equation），并令它通过 P。这样便得到只以投射角为变量的 u^2 表达式。最方便处理的变量是 $T = \tan\alpha$，因为 $\sec^2\alpha = 1 + T^2$ 能把一切化成 T 的有理函数（rational function）。求这个函数的最小值只是普通的微积分，而驻点（stationary point）方程原来是一条经过伪装的倍角公式（double-angle formula）。

解答

把质点视为只受重力作用而自由运动（不计空气阻力），以 O 为原点，x 轴水平指向 P，y 轴铅直向上。设 $T = \tan\alpha$ 及 $k = \tan\beta > 0$。



第 (i) 部分

水平速度为 $u\cos\alpha$，因此质点在时间 $t = x/(u\cos\alpha)$ 到达水平距离 x，此时其高度为

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = xT - \frac{gx^2(1+T^2)}{2u^2}.$$

通过 $P = (d, dk)$ 即表示

$$dk = dT - \frac{gd^2(1+T^2)}{2u^2} \quad \Longrightarrow \quad u^2 = \frac{gd}{2} \cdot \frac{1+T^2}{T-k}.$$

右方必须为正，所以只有 $T > k$，即 $\alpha > \beta$ 的角度才可行。这很合理：我们必须瞄准 P 的上方。因此我们要求以下函数的最小值：

$$f(T) = \frac{1+T^2}{T-k} \qquad (T > k).$$

由商法则（quotient rule），

$$f'(T) = \frac{2T(T-k) - (1+T^2)}{(T-k)^2} = \frac{T^2 - 2kT - 1}{(T-k)^2}.$$

分子在 $T = k \pm \sqrt{k^2+1}$ 时为零，其中只有取 $+$ 号的根大于 k。由于当 $T \to k^+$ 及 $T \to \infty$ 时都有 $f(T) \to \infty$，而两者之间只有一个驻点，所以该点给出最小值。因此最佳的 α 满足

$$T^2 - 2kT - 1 = 0. \qquad (*)$$

想一想 不代入根式的话，怎样在最小值处化简 $f(T)$?

利用 $(*)$ 改写各式。由它得 $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$，故

$$T - k = \frac{2T^2 - T^2 + 1}{2T} = \frac{1+T^2}{2T}, \qquad \text{因此} \qquad f(T) = \frac{1+T^2}{(1+T^2)/(2T)} = 2T.$$

所以

$$u^2 = \frac{gd}{2} \cdot 2T = gd\tan\alpha,$$

正如所求。

至于角度，把 $(*)$ 写成 $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$ 的形式，即为

$$\tan\beta = -\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = -\cot 2\alpha = \tan(2\alpha - 90^\circ),$$

这里用了 $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ 及 $-\cot\theta = \tan(\theta - 90^\circ)$。（若 $\alpha = 45^\circ$，则 $(*)$ 给出 $k = 0$，但由于 $\beta > 0$，这情况已被排除，所以 $\cot 2\alpha$ 有定义。）由于 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$，角 $2\alpha - 90^\circ$ 位于 $(-90^\circ, 90^\circ)$ 内，β 亦然，而 tan 在该区间上是一一对应（one-to-one）的。所以 $\beta = 2\alpha - 90^\circ$，即

$$2\alpha = \beta + 90^\circ.$$

换言之，最佳投射方向平分直线 OP 与铅直向上方向之间的夹角。

第 (ii) 部分

在 P 点，水平速度仍为 $u\cos\alpha$。所需时间为 $d/(u\cos\alpha)$，因此铅直速度为

$$v_y = u\sin\alpha - \frac{gd}{u\cos\alpha}.$$

若质点在 P 点的运动方向与水平成仰角 θ，则

$$\tan\theta = \frac{v_y}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gd}{u^2\cos^2\alpha} = T - \frac{gd(1+T^2)}{gdT} = T - \frac{1+T^2}{T} = -\frac{1}{T} = -\cot\alpha,$$

这里用了第 (i) 部分的 $u^2 = gdT$。所以 $\tan\theta = \tan(\alpha - 90^\circ)$，又由于 θ 介乎 -90° 与 90° 之间，故 $\theta = \alpha - 90^\circ$。

质点通过 P 时正在向下运动，方向与水平成俯角 $90^\circ - \alpha$。它在 P 点的方向与投射方向互相垂直。

验算

- 取 $\beta = 30^\circ$。则 $\alpha = 60^\circ$ 及 $u^2 = \sqrt{3}\,gd$。直接计算，$f(T)$ 在 $T = \sqrt{3}$ 的值为 $4/(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3}$，与 $2T$ 吻合。最终方向为水平以下 30°，与图中一致。
- 令 $\beta \to 0$，得 $\alpha \to 45^\circ$ 及 $u^2 \to gd$。这正是熟悉的事实：在水平地面上，以 45° 投射可得最大射程 u^2/g。此时质点以水平以下 45° 著地，同样与发射方向垂直。
- 对 200 组随机选取的 d 和 β，在 α 上作数值搜索，每次所得的最小化角度都是 $\frac{1}{2}(\beta + 90^\circ)$，最小值都是 $gd\tan\alpha$。

常见错误

- 忽略条件 $T > k$，保留了根 $k - \sqrt{k^2+1}$。该根是负数，意味着向下投射。
- 由正切值相等推出 $\beta = 2\alpha - 90^\circ$，却没有说明为何两个角都位于 tan 为一一对应的区间内。
- 在 (ii) 中给出角度 $90^\circ - \alpha$，却没有说明质点正在下降。

STEP 之外

对于固定的速率 u，能到达的点都位于一条抛物线之内，这条抛物线就是该族轨迹的包络线（envelope），又称“安全抛物线”（parabola of safety）。到达 P 的最小速率轨迹，正是使 P 落在该包络线上的那一条，而 (ii) 中的垂直关系是这条曲线的几何性质之一。曲线

族的包络线以及带约束的最优化（constrained optimisation），都会在大学一年级课程中进一步发展。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）是一本好书，可以看到如何以这种严谨态度处理抛射体问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。