详细解答

STEP I 2017，第 8 题

纯数学 · 递推关系与数学归纳法

STEP I 2017，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s1-q8

关键思路

表达式 $a_n^2 + 2a_nb_n - b_n^2$ 在递推关系（recurrence）的每一步下都保持不变，因此它永远等于初始值。把它除以 b_n^2，便得到一条关于比值 c_n 的精确方程，其中带有一个很小的误差项 $1/b_n^2$。对这条方程配方（completing the square）几乎完成了所有工作：它给出极限、比值位于 $\sqrt{2}-1$ 的哪一侧，以及 $\sqrt{2}$ 的有理数上下界。

解答

归纳法

当 $n = 1$ 时，$a_1^2 + 2a_1b_1 - b_1^2 = 1 + 4 - 4 = 1$，所以 $(*)$ 成立。

假设 $(*)$ 对某个 $n \geq 1$ 成立。记 $a = a_n$，$b = b_n$，

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= a^2 + 4ab + 4b^2, \\ 2a_{n+1}b_{n+1} &= 2(a+2b)(2a+5b) = 4a^2 + 18ab + 20b^2, \\ b_{n+1}^2 &= 4a^2 + 20ab + 25b^2. \end{aligned}$$

把前两式相加再减去第三式，得

$$a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} - b_{n+1}^2 = a^2 + 2ab - b^2 = 1.$$

因此 $(*)$ 对 $n+1$ 成立，由归纳法（induction）可知它对所有 $n \geq 1$ 成立。

第 (i) 部分

首先，每个 a_n 和 b_n 都是正数：这在 $n=1$ 时成立，而递推关系以正系数由 a_n 和 b_n 构成 a_{n+1} 和 b_{n+1}。因此

$$b_{n+1} = 2a_n + 5b_n > 5b_n,$$

因为 $a_n > 0$。由 $b_1 = 2 = 2\times 5^0$ 开始，每一步至少乘以 5，便得到对所有 $n \geq 1$ 有 $b_n \geq 2\times 5^{n-1}$（一行归纳即可）。

现在把 $(*)$ 除以非零的 b_n^2：

$$c_n^2 + 2c_n - 1 = \frac{1}{b_n^2}, \qquad \text{即} \qquad (c_n+1)^2 = 2 + \frac{1}{b_n^2}. \tag{†}$$

> ? **想一想** 应该取哪一个平方根?

由于 $c_n > 0$，数 $c_n + 1$ 是正数，所以我们取正平方根：

$$c_n + 1 = \sqrt{2 + \frac{1}{b_n^2}}.$$

当 $n \to \infty$ 时，$0 < 1/b_n^2 \leq \frac{1}{4}25^{-(n-1)} \to 0$，所以 $c_n + 1 \to \sqrt{2}$（平方根函数是连续（continuous）的）。因此 $c_n \to \sqrt{2} - 1$，得证。

第 (ii) 部分

由 (†)，$(c_n+1)^2 = 2 + 1/b_n^2 > 2$。由于 $c_n + 1 > 0$ 且 $\sqrt{2} > 0$，这给出 $c_n + 1 > \sqrt{2}$，即 $c_n > \sqrt{2} - 1$。

至于另一个界，以 2 分别除以 $c_n + 1 > \sqrt{2}$ 的两边；两边都是正数，所以不等号反转：

$$\frac{2}{c_n+1} < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

合起来，

$$\frac{2}{c_n+1} < \sqrt{2} < c_n + 1.$$

> ? **想一想** 哪一个 n 值会给出 99/70?

我们需要 $c_n + 1 = (a_n + b_n)/b_n$ 等于 99/70，所以要找 $b_n = 70$。逐步计算递推关系：

$$(a_1, b_1) = (1, 2), \quad (a_2, b_2) = (5, 12), \quad (a_3, b_3) = (29, 70).$$

所以 $c_3 = \frac{29}{70}$，$c_3 + 1 = \frac{99}{70}$，而

$$\frac{2}{c_3+1} = \frac{140}{99}.$$

把 $n = 3$ 代入这个双向不等式，得

$$\frac{140}{99} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}.$$

验算

- $(a_3, b_3) = (29, 70)$ 满足 $(*)$：$841 + 4060 - 4900 = 1$。
- $\frac{140}{99} \approx 1.414141$，$\frac{99}{70} \approx 1.414286$，而 $\sqrt{2} \approx 1.414214$ 位于两者之间。这个区间的宽度是 $\frac{1}{6930}$。
- 下一项 $(a_4, b_4) = (169, 408)$ 给出 $c_4 \approx 0.4142157$，与 $\sqrt{2} - 1$ 的差已在 2.2×10^{-6} 以内，这与误差大约按 $1/b_n^2$ 下降的情况吻合。
- 平方验证：$140^2 = 19600 < 2 \times 99^2 = 19602$，而 $99^2 = 9801 > 2 \times 70^2 = 9800$。

常见错误

- 展开 $n+1$ 时的 $(*)$ 而没有仔细合并同类项：ab 和 b^2 的系数只是刚好抵消（$4 + 18 - 20 = 2$ 及 $4 + 20 - 25 = -1$）。
- 声称 $b_{n+1} \geq 5b_n$，却没有指出 $a_n > 0$。
- 忘记说明为何取正平方根，或在取倒数时反转不等号，却没有说明两边都是正数。

STEP 之外

这个递推关系就是乘以矩阵（matrix）$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，其行列式（determinant）为 1，并保持二次型（quadratic form）$x^2 + 2xy - y^2$ 不变；寻找这类不变二次型正是佩尔方程（Pell's equation）理论的核心。数 $c_n + 1$，即 $\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}, \ldots$，是 $\sqrt{2}$ 的连分数渐近分数（continued-fraction convergent）中每隔一个所取的项；渐近分数是在其分母大小范围内最佳的有理逼近。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）对连分数和佩尔方程有精彩的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。