详细解答

STEP I 2017，第 7 题

纯数学 · 拿破仑定理

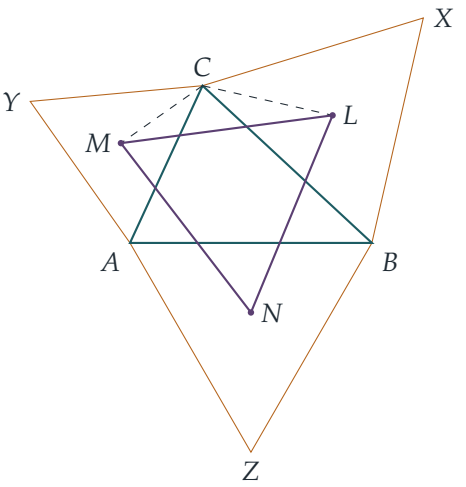
STEP I 2017，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s1-q7

关键思路

一切都发生在 ABC 的顶点上。等边三角形（equilateral triangle）的中心（centre）位于其每个角的角平分线（angle bisector）上，所以由 C 到 L 及由 C 到 M 的直线，各自与 ABC 的一条边成 30°。由此可以用 C 表示角 LCM。再在三角形 LCM 中应用余弦公式（cosine rule），便得到 $|LM|$。结果原来是关于 a、b、c 对称（symmetric）的，而正是这种对称性令 LMN 成为等边三角形。



解答

第 (i) 部分

在边长为 b 的等边三角形 CYA 中，中心 M 位于全部三条中线（median）上，而这些中线同时也是高（altitude）和角平分线。由 C 出发的中线长度为 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$，而中心位于由顶点起沿中线三分之二的位置。所以

$$|CM| = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, b = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

同理，三角形 BXC 的边长为 a，所以

$$|CL| = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

第 (ii) 部分

由于 CM 平分 60° 的角 YCA，直线 CM 与 CA 成 30°，且位于远离 B 的一侧。同样地，CL 与 CB 成 30°，且位于远离 A 的一侧。绕 C 由 L 转到 M，先经过 30°，再经过三角形的角 C，然后再经过 30°。所以

$$\angle LCM = C + 60^\circ.$$

? **想一想** 如果 $C > 120^\circ$，以致 $C + 60^\circ$ 大于 180°，那又怎样?

这时三角形 LCM 在 C 的角是另一边的角，即 $360^\circ - (C + 60^\circ)$。但 $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$，所以下面的余弦公式在所有情况下都给出相同结果。

在三角形 LCM 中应用余弦公式，并代入第 (i) 部分的长度：

$$\begin{aligned} |LM|^2 &= \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\cos(C + 60^\circ) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\left(\tfrac{1}{2}\cos C - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{ab\cos C}{3} + \frac{\sqrt{3}\,ab\sin C}{3}. \end{aligned}$$

现在我们运用关于三角形 ABC 的两个事实。余弦公式给出 $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$，而面积为 $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$，所以 $ab\sin C = 2\Delta$。两边乘以 6，

$$\begin{aligned} 6|LM|^2 &= 2(a^2 + b^2) - 2ab\cos C + 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ &= 2a^2 + 2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2) + 4\sqrt{3}\,\Delta \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,\Delta, \end{aligned}$$

得证。

若把 a、b、c 置换（permute），右方保持不变，而 Δ 也与三角形顶点的标记方式无关。在顶点 A（求 $|MN|$）及顶点 B（求 $|NL|$）重复同样的论证，会得到相同的式子。所以

$$|LM| = |MN| = |NL|,$$

因此 LMN 是等边三角形。

面积相等。边长为 s 的等边三角形面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$。设 $S = a^2 + b^2 + c^2$。那么

$$[LMN] = \frac{\sqrt{3}}{4}|LM|^2 = \frac{\sqrt{3}}{24}(S + 4\sqrt{3}\,\Delta) = \frac{\sqrt{3}}{24}S + \frac{\Delta}{2}.$$

因此

$$[LMN] = \Delta \iff \frac{\sqrt{3}}{24}S = \frac{\Delta}{2} \iff S = \frac{12\Delta}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\,\Delta.$$

每一步都可逆，所以这正是所要求的“当且仅当”。

第 (iii) 部分

利用 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 及 $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$，把所有量都用 a、b 和 C 表示。下面每一行都与上一行等价：

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \\ \iff \quad & 2a^2 + 2b^2 - 2ab\cos C = 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = ab(\cos C + \sqrt{3}\sin C) \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ), \end{aligned}$$

因为 $\cos C + \sqrt{3}\sin C = 2(\cos C\cos 60^\circ + \sin C\sin 60^\circ) = 2\cos(C - 60^\circ)$。两边减去 $2ab$，

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ) - 2ab \iff (a-b)^2 = -2ab(1 - \cos(C - 60^\circ)).$$

所以两个条件等价。

> ? **想一想** 一个平方怎么可能等于一个前面带负号的量?

只有两边都是零时才可以。左方 $(a-b)^2$ 至少是 0。右方则有 $ab > 0$ 及 $1 - \cos(C - 60^\circ) \geq 0$，所以右方至多是 0。因此等式成立若且仅若

$$a = b \quad \text{及} \quad \cos(C - 60^\circ) = 1.$$

由于 $0^\circ < C < 180^\circ$，我们有 $-60^\circ < C - 60^\circ < 120^\circ$，而在这范围内余弦等于 1 的角只有 0°。所以 $C = 60^\circ$。一个 $a = b$ 而顶角为 60° 的三角形，其余两角相等，且总和为 120°，所以三个角都是 60°，三角形是等边三角形。反之，等边三角形满足 $a = b$ 及 $C = 60^\circ$，所以它符合该条件。

结合第 (ii) 部分：$[LMN] = [ABC] \iff a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \iff ABC$ 是等边三角形。

验算

- 边长为 1 的等边三角形 ABC：此时 $\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}$，而 $6|LM|^2 = 3+3 = 6$，所以 $|LM| = 1$，两个面积相等，与第 (iii) 部分的预测一致。
- 边长为 3–4–5 的直角三角形：$S = 50$ 及 $\Delta = 6$，所以 $|LM|^2 = (50+24\sqrt{3})/6 \approx 15.26$。于是 $[LMN] \approx 6.61$，大于 $[ABC] = 6$。用电脑以坐标计算点 L、M、N，得到相同的数值，并在数以千计的随机三角形（包括钝角三角形）上验证了 $6|LM|^2$ 的公式。
- 第 (iii) 部分亦显示对所有三角形都有 $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$，所以 $[LMN] \geq [ABC]$ 恒成立。

常见错误

- 把 $|CM|$ 当作整条中线 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$，或其三分之一，而不是三分之二。
- 用了 $\angle LCM = C + 30^\circ$ 或 C，忘记了两侧各有一个 30°。
- 在第 (iii) 部分只得出“$a = b$”便停下来。你还需要 $C = 60^\circ$，并且要利用 C 的范围来排除其他余弦为 1 的角。

STEP 之外

这就是拿破仑定理（Napoleon's theorem）：在任意三角形的各边上向外作等边三角形，这些等边三角形的中心构成一个等边三角形。第 (iii) 部分得到的不等式 $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$ 是 Weitzenböck 不等式（Weitzenböck's inequality）。复数（complex numbers）可以给出拿破仑定理一个非常简洁的证明：旋转 60° 就是乘以 $e^{i\pi/3}$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）把这种处理几何的方法发展得十分优美。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。