详细解答

# STEP I 2017，第 6 题

纯数学 · 积分与符号变化

**STEP I 2017，第 6 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s1-q6

## 关键思路

一个从不变号、又不恒等于零的连续函数（continuous function），其积分（integral）必定不为零：它在某个小区间上与零保持距离，单是这个区间的贡献已经不为零。第 (i) 部分把这个想法严格化，而第 (ii) 及 (iii) 部分则把它应用到一些巧妙选取的函数上。在 (ii) 中，被积函数（integrand）$(x-\alpha)^2 g(x)$ 与 $g$ 同号；在 (iii) 中，分部积分（integration by parts）把关于 $h$ 的资料转化为 $h'$ 满足 (ii) 的条件。

## 解答

### 第 (i) 部分

用反证法（proof by contradiction），假设 $f$ 在 $[0,1]$ 上并非同时取正值和负值。那么，要么对 $[0,1]$ 中所有 $x$ 都有 $f(x) \geq 0$，要么对所有这些 $x$ 都有 $f(x) \leq 0$。如有需要，以 $-f$ 代替 $f$（这既不改变假设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，也不改变结论），我们可假设 $f(x) \geq 0$ 处处成立。

题目告诉我们，对某个 $c \in [0,1]$ 有 $f(c) \neq 0$，因此 $f(c) > 0$。由于 $f$ 在 $c$ 处连续，存在 $\delta > 0$，使得对 $[0,1]$ 中所有满足 $|x-c| < \delta$ 的 $x$，都有 $f(x) > \frac{1}{2} f(c)$。这个集合包含一个长度 $q-p$ 为正的区间 $[p,q] \subseteq [0,1]$（若 $c \leq \frac{1}{2}$，取 $[c, c+\eta]$；若 $c > \frac{1}{2}$，取 $[c-\eta, c]$，其中 $0 < \eta < \delta$ 且 $\eta \leq \frac{1}{2}$）。由于 $f \geq 0$ 处处成立，

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \tfrac{1}{2} f(c)\,(q-p) \;>\; 0,$$

这与 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ 矛盾。因此 $f$ 在 $[0,1]$ 上同时取正值和负值。

**想一想** 为甚么单凭“$f \geq 0$ 且 $f(c) > 0$，所以积分是正数”并不足够?

一个函数可以只在单一点上为正，而积分完全察觉不到；单一点是没有宽度的。正是连续性把 $c$ 处的正值扩展到一个长度为正的区间上，这才迫使积分为正。

### 第 (ii) 部分

展开平方并利用三个条件 $(*)$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-\alpha)^2 g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2 g(x)\,\mathrm{d}x - 2\alpha\int_0^1 x g(x)\,\mathrm{d}x + \alpha^2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha^2 - 2\alpha\cdot\alpha + \alpha^2\cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

现在用反证法，假设对每个 $x \in [0,1]$ 都有 $g(x) \neq 0$。那么 $g$ 不可能在 $[0,1]$ 上同时取两种符号（否则根据题目开首的假设，它会在某处等于零），所以 $g$ 要么处处严格为正，要么处处严格为负。

设 $f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$，它是连续的。由于 $(x-\alpha)^2 \geq 0$，凡 $f$ 不为零之处，它都与 $g$ 同号，所以 $f$ 不会同时取两种符号。但 $f$ 在 $[0,1]$ 中某处不为零：$(x-\alpha)^2$ 只在 $x = \alpha$ 处等于零，所以除了（可能的）$\alpha$ 之外，对每个 $x \in [0,1]$ 都有 $f(x) \neq 0$。而且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$。根据第 (i) 部分，$f$ 必须同时取两种符号，矛盾。因此对 $[0,1]$ 中某个 $x$，有 $g(x) = 0$。

**一个线性例子**。设 $g(x) = a + bx$，则条件 $(*)$ 变为

$$a + \tfrac{1}{2}b = 1, \qquad \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}b = \alpha, \qquad \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{4}b = \alpha^2.$$

由第一式得 $a = 1 - \frac{1}{2}b$；代入第二式得 $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}b = \alpha$，所以

$$b = 12\alpha - 6, \qquad a = 4 - 6\alpha.$$

于是第三个条件变为

$$\tfrac{1}{3}(4 - 6\alpha) + \tfrac{1}{4}(12\alpha - 6) = \alpha - \tfrac{1}{6} = \alpha^2,$$

即 $6\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$，所以

$$\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

留意 $\alpha$ 并非可以随意选取：线性的 $g$ 只在这两个值下才成立。取 $\alpha = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$，得 $b = 2\sqrt{3}$ 及 $a = 1 - \sqrt{3}$，所以

$$g(x) = 1 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,x,$$

它在

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.211,$$

处等于零，而这点位于 $[0,1]$ 内，正如第 (ii) 部分所说必然如此。（另一个选择 $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ 给出 $g(x) = 1 + \sqrt{3} - 2\sqrt{3}\,x$，它在 $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.789$ 处等于零，同样位于 $[0,1]$ 内。）

### 第 (iii) 部分

我们证明 $g = h'$ 满足 $(*)$，其中 $\alpha = 1 - \beta$。这里 $h'$ 是连续的，符合第 (ii) 部分的要求。首先，

$$\int_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x = h(1) - h(0) = 1.$$

以 $u = x$、$\mathrm{d}v = h'(x)\,\mathrm{d}x$ 进行分部积分，

$$\int_0^1 xh'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[xh(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \beta.$$

再进行一次分部积分，这次取 $u = x^2$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2h'(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[x^2h(x)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \beta(2-\beta) = 1 - 2\beta + \beta^2 = (1-\beta)^2.\end{aligned}$$

**想一想** 那个古怪的值 $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$ 是从哪里来的?

它正是为了令第三个积分等于第二个积分的平方而特意选取的。经过两次分部积分后，第二个积分是 $1-\beta$，所以我们需要第三个积分等于 $(1-\beta)^2$，而 $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$ 恰好做到这一点。

所以 $h'$ 是连续的，并且满足 $(*)$，其中 $\alpha = 1 - \beta$。根据第 (ii) 部分，对 $[0,1]$ 中某个 $x$，有 $h'(x) = 0$。

## 验算

- 对于 $g(x) = 1 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,x$，直接积分得 $\int_0^1 g = 1$、$\int_0^1 xg = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.7887$ 及 $\int_0^1 x^2 g \approx 0.6220 = (0.7887)^2$。
- 第 (iii) 部分可用 $h(x) = (1-\sqrt{3})x + \sqrt{3}\,x^2$ 来测试，它的导数 (derivative) 正是上面的 $g$。那么 $h(0) = 0$、$h(1) = 1$、$\beta = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.2113$，以及 $\int_0^1 xh = \frac{1}{2}\beta(2-\beta) \approx 0.1890$。它的导数在 $x \approx 0.211$ 处等于零，所以 $h$ 在 $[0,1]$ 内有一个转向点 (turning point)，与预测相符。

## 常见错误

- 在 (i) 中，不用连续性便论证 “$f \geq 0$，所以 $\int f > 0$”。一个非负函数可以积分为零而又不处处为零（例如只在一点上不为零），所以连续性是不可或缺的。
- 在 (ii) 中，把 (i) 应用到 $g$ 本身。我们对 $\int g$ 除了知道它等于 1 之外一无所知；第 (i) 部分必须应用到 $(x-\alpha)^2 g$ 上，而且我们必须验证这个函数在某处不为零。

► 在 (iii) 中，忘记了 $h'$ 必须连续，(ii) 才可应用。正因如此，题目才说 $h$ 有连续的导数。

## STEP 之外

条件 $(*)$ 表示：如果 $g$ 是一个概率密度（probability density），它的平均值（mean）便是 $\alpha$，而它的方差（variance）$\int (x-\alpha)^2 g = 0$。真正的概率密度不可能有零方差，这就是为甚么 $g$ 必须在某处跌至零以下。第 (i) 部分是实分析（real analysis）中的一条标准引理（lemma）：一个连续、非负且积分为零的函数必定恒等于零。它经常被使用，例如在变分法（calculus of variations）中。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对连续性和黎曼积分（Riemann integral）的发展足够严谨，既可证明这条引理，也可证明题目容许你假设的介值定理（intermediate value theorem）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。