详细解答

STEP I 2017，第 5 题

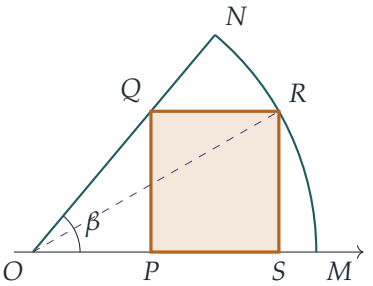
纯数学 • 以微分法求最优值

> **STEP I 2017，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q5

关键思路

顶点的位置一旦定下来，一切就只由单一变量 x 决定：Q 位于 P 的正上方，在直线 $y = x\tan\beta$ 上；R 与 Q 同高，位于圆上。利用毕氏定理（Pythagoras′ theorem）可把 s 以 x 表示，于是面积变成一个普通的单变量函数，可以直接求导。最后的角度条件则可由 tan 的半角公式（half-angle formula）直接得出。

解答



面积

由于 $PQRS$ 是长方形，且 P 和 S 都在 x 轴上，所以边 PQ 和 SR 都是铅垂的。因此 Q 的 x 坐标是 x。它位于 ON 上，即直线 $y = x\tan\beta$ 上，所以 $Q = (x,\, x\tan\beta)$，而 $R = (s,\, x\tan\beta)$。长方形的阔为 $PS = s - x$（这是正数，因为 S 比 P 离 O 更远），高为 $PQ = x\tan\beta$，所以

$$A = x(s - x)\tan\beta,$$

正如所求。

求 s 及 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}$

由于 R 在圆上，$OR = a$，所以 $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$。因为 $s > 0$，

$$s = \sqrt{a^2 - x^2\tan^2\beta}.$$

对 $s^2 = a^2 - x^2\tan^2\beta$ 作隐函数求导（implicit differentiation），得 $2s\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -2x\tan^2\beta$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x\tan^2\beta}{s}$。现在把面积写成 $A = (xs - x^2)\tan\beta$，并对 xs 使用乘积法则（product rule）：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= \left(s + x\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} - 2x\right)\tan\beta \\ &= (s - 2x)\tan\beta - \frac{x^2}{s}\tan^3\beta,\end{aligned}$$

这就是所求的结果。

最大面积

首先考虑 x 的范围。当 x 从 0 开始增加时，Q 沿 ON 向上移动，R 则沿圆弧向 N 移动；当 R 到达 N 时，长方形收缩成一条铅垂线段，即 $x = a\cos\beta$ 时（此时 $s = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\beta} = a\cos\beta = x$）。所以 $0 < x < a\cos\beta$，而 A 是 $[0, a\cos\beta]$ 上的连续函数，两端的值都是 $A = 0$，中间则 $A > 0$。因此它的最大值必定出现在区间内部的一个驻点（stationary point）。

设 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$，除以 $\tan\beta > 0$ 再乘以 $s > 0$：

$$\begin{aligned}s^2 - 2xs &= x^2\tan^2\beta \\ s^2 - 2xs + x^2 &= x^2(1 + \tan^2\beta) = x^2\sec^2\beta \\ (s - x)^2 &= x^2\sec^2\beta.\end{aligned}$$

想一想 应该取哪一个平方根？我们又怎样知道这是最大值？

$s - x$ 和 $x\sec\beta$ 都是正数（因为 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$），所以 $s - x = x\sec\beta$；另一个根会令 $s - x$ 为负数。因此在 $0 < x < a\cos\beta$ 内恰好只有一个驻点，由

$$s = x(1 + \sec\beta),$$

给出，而根据上一段，它必定给出最大面积。

要求出该面积，把它代入 $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$。利用 $\tan^2\beta = \sec^2\beta - 1$，

$$(1 + \sec\beta)^2 + \tan^2\beta = 2\sec\beta + 2\sec^2\beta = 2\sec\beta\,(1 + \sec\beta),$$

所以

$$x^2 = \frac{a^2}{2\sec\beta\,(1+\sec\beta)} = \frac{a^2\cos^2\beta}{2(1+\cos\beta)}.$$

在这一点，$s - x = x\sec\beta$，所以

$$A = x\cdot x\sec\beta\cdot\tan\beta = x^2\,\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} = \frac{a^2\sin\beta}{2(1+\cos\beta)}$$
$$= \frac{a^2\cdot 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\cdot 2\cos^2\frac{1}{2}\beta} = \tfrac{1}{2}a^2\tan\tfrac{1}{2}\beta,$$

这里用了 $\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ 及 $1+\cos\beta = 2\cos^2\frac{1}{2}\beta$。

角 ROS

在直角三角形 ORS 中，$\tan\angle ROS = \dfrac{SR}{OS} = \dfrac{x\tan\beta}{s}$。在最大值处，

$$\tan\angle ROS = \frac{\tan\beta}{1+\sec\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta+1} = \tan\tfrac{1}{2}\beta,$$

用的是同样的两条半角恒等式。$\angle ROS$ 和 $\frac{1}{2}\beta$ 都位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内，而 tan 在此区间上是一一对应（one-to-one）的，所以 $\angle ROS = \frac{1}{2}\beta$：在最佳的长方形中，$OR$ 平分扇形。

验算

- 取 $a = 1$、$\beta = \frac{\pi}{3}$。则 $x^2 = \frac{1/4}{3} = \frac{1}{12}$，$s = 3x$，而 $A = x\cdot 2x\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.2887$，正好等于 $\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{6}$。以电脑对大量随机的 a 和 β，在 x 的细密网格上搜索，得到相同的最大值和相同的最佳 x。
- 当 $\beta \to 0$ 时，扇形收缩，而 $\frac{1}{2}a^2\tan\frac{1}{2}\beta \to 0$，理应如此。
- 单位：A 是 a^2 乘以一个纯数，所以它确实是面积。

常见错误

- 忘记 s 依赖于 x，把 s 当作常数去对 $x(s-x)\tan\beta$ 求导。
- 把 $s - x = -x\sec\beta$ 也一并接受，或没有说明为何该驻点是最大值。

STEP 之外

答案如此整齐——OR 正好沿扇形的角平分线——背后有一个漂亮的解释：若 $R = (a\cos\theta, a\sin\theta)$，简短计算可得 $A = \frac{1}{2}a^2\big(\cos(2\theta-\beta) - \cos\beta\big)/\sin\beta$，显然在 $\theta = \frac{1}{2}\beta$ 时

取得最大值。选对变量，可以令最优化（optimisation）问题几乎变得轻而易举。在大学里，你会学到多变量的约束最优化（constrained optimisation），届时不必消去 s，而可以用拉格朗日（Lagrange）乘数法（Lagrange multipliers），在 $s^2 + x^2 \tan^2 \beta = a^2$ 的约束下求 $x(s - x)$ 的最大值。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）收录了更多同类题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。