详细解答

STEP I 2017，第 4 题

纯数学 · 二次方程与等比级数

> **STEP I 2017，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q4

关键思路

一切取决于开区间（open interval）$(-1,1)$ 内有多少个 r 值会给出某个特定的 p（或 q）值。这其实是关于一条限制在 $-1<r<1$ 上的抛物线（parabola）的问题：一条水平直线与它相交一次、两次或完全不相交，而草图会告诉我们是哪一种情况。一旦知道 r，和便随之确定；又因为和是 r 的一一对应（one-to-one）函数，两个不同的 r 值必定给出两个不同的和。要找出这些和所满足的方程，我们把 r 用和来表示，然后代入。

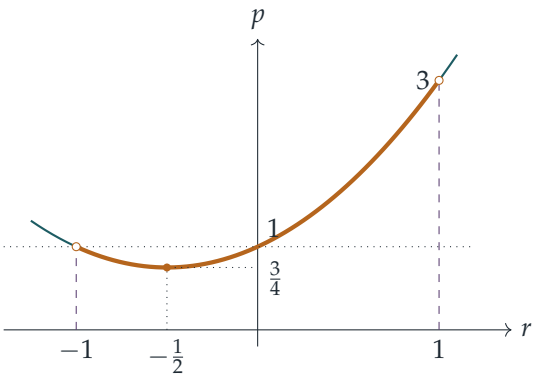
解答

第 (i) 部分

配方（completing the square），

$$1+r+r^2=\left(r+\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4},$$

因此图像是一条抛物线，其最小点（minimum point）为 $\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4}\right)$。它经过 $(-1,1)$、$(0,1)$ 和 $(1,3)$。



在 $-1 < r < 1$ 上（粗线那段弧），函数由 1（取不到，因为 $r = -1$ 被排除）递减至 $r = -\frac{1}{2}$ 处的最小值 $\frac{3}{4}$，然后递增趋向 3（同样取不到，因为 $r = 1$ 被排除）。因此

$$\tfrac{3}{4} \le p < 3.$$

当 $1 < p < 3$ 时。给出这个 p 的 r 值是以下方程的根（roots）：

$$r^2 + r + (1 - p) = 0.$$

两根之积为 $1 - p < 0$，所以有一个正根和一个负根。两根之和为 -1，所以负根等于 -1 减去正根，即小于 -1，因此不容许。正根为

$$r = \frac{-1 + \sqrt{4p - 3}}{2},$$

又因为 $1 < 4p - 3 < 9$，我们有 $0 < r < 1$，所以这个根是容许的。（从图像看：高度为 $p \in (1, 3)$ 的直线只在上升部分 $0 < r < 1$ 与粗线弧相交。）所以 p 唯一确定 r，从而唯一确定 $S = 1/(1 - r)$。

当 $\frac{3}{4} < p < 1$ 时。此时判别式（discriminant）$1 - 4(1 - p) = 4p - 3$ 为正，所以这个二次方程（quadratic）有两个相异实根。两根之积 $1 - p$ 为正，两根之和为 -1，所以两根皆为负。每个根都等于 -1 减去另一个根，而另一个根是负数，所以每个根都大于 -1。因此两根都位于 $(-1, 0)$ 内，两者皆容许。

> ? **想一想** 有两个 r 值，没问题；但为甚么它们一定给出两个不同的 S 值?

因为 $S = \dfrac{1}{1 - r}$ 可以反过来写成 $r = 1 - \dfrac{1}{S}$。因此不同的 r 值给出不同的 S 值，所以 S 恰好有两个可能值。

要找出它们满足的方程，把 $r = 1 - u$（其中 $u = 1/S$）代入 $r^2 + r + 1 - p = 0$：

$$(1 - u)^2 + (1 - u) + 1 - p = 0$$
$$u^2 - 3u + (3 - p) = 0.$$

代入 $u = 1/S$ 并乘以 S^2（它不为零），得

$$(3-p)S^2 - 3S + 1 = 0,$$

正如所求。由于两个 S 值都来自容许的根 r，它们都满足这个方程。

第 (ii) 部分

再次配方，

$$q = 1 + 2r + 3r^2 = 3\left(r + \tfrac{1}{3}\right)^2 + \tfrac{2}{3}.$$

最小值为 $r = -\frac{1}{3}$ 处的 $\frac{2}{3}$；在 $r = -1$ 处的值为 2，在 $r = 1$ 处的值为 6。所以在 $-1 < r < 1$ 上：

- 在下降部分 $-1 < r \le -\frac{1}{3}$ 上，q 取 $\left[\frac{2}{3}, 2\right)$ 中每个值恰好一次；
- 在上升部分 $-\frac{1}{3} \le r < 1$ 上，q 取 $\left[\frac{2}{3}, 6\right)$ 中每个值恰好一次。

两部分只共有 $r = -\frac{1}{3}$ 这一点。因此一个 q 值来自

- 恰好一个 r：若 $q = \frac{2}{3}$（即 $r = -\frac{1}{3}$）或 $2 \le q < 6$（只在上升部分）；
- 恰好两个 r 值：若 $\frac{2}{3} < q < 2$（每部分各一个）；
- 其他情况下没有任何 r。

例如在 $q = 2$ 时，方程 $3r^2 + 2r - 1 = 0$ 可因式分解为 $(3r-1)(r+1) = 0$，而根 $r = -1$ 被排除，只剩下 $r = \frac{1}{3}$。

和之前一样，T 确定 r：由于 $1 - r > 0$，我们有 $1 - r = 1/\sqrt{T}$。所以不同的 r 给出不同的 T。因此

$$T \text{ 唯一确定，当} q = \tfrac{2}{3} \text{ 或} 2 \le q < 6,$$

以及

$$T \text{ 有两个可能值，当} \tfrac{2}{3} < q < 2.$$

二次方程。设 $r = 1 - u$，其中 $u = 1 - r = 1/\sqrt{T} > 0$。则

$$q = 1 + 2(1-u) + 3(1-u)^2 = 3u^2 - 8u + 6.$$

由于 $u^2 = 1/T$，上式即 $\dfrac{3}{T} + 6 - q = \dfrac{8}{\sqrt{T}}$。乘以 T，

$$(6-q)T + 3 = 8\sqrt{T}.$$

这已经是一个关于 $\sqrt{T}$ 的二次方程。要得到关于 T 本身的方程，把两边平方：

$$(6-q)^2T^2 + 6(6-q)T + 9 = 64T,$$

即

$$(6-q)^2\,T^2 - 2(3q+14)\,T + 9 = 0.$$

T 的两个可能值都满足这个方程。这里平方不可能引入多余的根。由于 $q < 6$ 且 $T > 0$，左边 $(6-q)T+3$ 为正，所以另一种可能 $(6-q)T+3 = -8\sqrt{T}$ 没有 $T>0$ 的解。此外，关于 T 的二次方程两根之积 $9/(6-q)^2$ 为正，两根之和亦为正，所以两根皆为正。因此它的两个根正好就是 T 的两个值。

验算

- 取 $p = \frac{7}{8}$。则 $r^2 + r + \frac{1}{8} = 0$ 给出 $r = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{4}$，两者皆在 $(-1,0)$ 内。相应的和 $S \approx 0.873$ 及 $S \approx 0.540$ 满足 $\frac{17}{8}S^2 - 3S + 1 = 0$，其两根之和为 $\frac{24}{17} \approx 1.412$，积为 $\frac{8}{17}$。
- 取 $q = 1$。则 $3r^2 + 2r = 0$ 给出 $r = 0$ 或 $r = -\frac{2}{3}$，所以 $T = 1$ 或 $T = \frac{9}{25}$。二次方程变成 $25T^2 - 34T + 9 = (T-1)(25T-9)$，与预期相符。
- 在边界 $q = \frac{2}{3}$ 处，二次方程为 $\frac{256}{9}T^2 - 32T + 9 = 0$，判别式为 $1024 - 1024 = 0$。它有重根 $T = \frac{9}{16} = 1/(1+\frac{1}{3})^2$，与唯一的值 $r = -\frac{1}{3}$ 吻合。
- 我们用电脑检验了各范围内数以千计的随机 p 和 q 值：根的个数及两条二次方程都一致。

常见错误

- 忘记 $r = \pm 1$ 被排除，以致错误地把 $p = 1$ 归入“两个值”的情况，并把 $q = 2$ 排除在“唯一”的集合之外。
- 遗漏孤立的值 $q = \frac{2}{3}$（顶点（vertex）），在该处 T 同样唯一。
- 平方后没有检查是否引入了多余的根。

STEP 之外

这道题其实是在问函数何时可逆（invertible）：映射 $r \mapsto p$ 在定义域（domain）的一部分上是一一对应的，在其余部分上则是二对一的，而答案取决于定义域，不只取决于公式。级数 $\sum r^n$ 和 $\sum nr^{n-1}$ 分别是一个幂级数（power series）及其逐项求导所得的导数（term-by-term derivative）。为甚么在收敛半径（radius of convergence）之内可以逐项求导，是大学一年级分析（analysis）课程的标准结果。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对幂级数和一致收敛（uniform convergence）的处理既严谨又易读。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。