详细解答

STEP I 2017，第 3 题

纯数学 · 抛物线的切线

> **STEP I 2017，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q3

关键思路

这里的一切都可以用参数（parameter）p 和 q 表示，所以计划是先求出 R、S、T 的坐标，然后直接计算两个面积。三角形 RST 特别容易处理，因为它的边 ST 落在 y 轴上：它的高就是 R 到该轴的距离。至于三角形 OPQ，由于它有一个顶点在原点，公式 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ 一行就能完成计算。

解答

P 处的切线

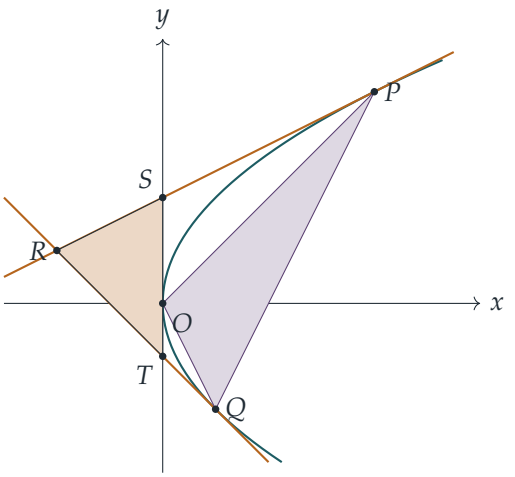
对 $y^2 = 4ax$ 作隐函数微分（implicit differentiation），得 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4a$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{y}$。在 P 点，$y = 2ap \neq 0$（因为 $a, p > 0$），斜率（gradient）为

$$\frac{2a}{2ap} = \frac{1}{p}.$$

因此通过 $P(ap^2, 2ap)$ 的切线（tangent）是

$$y - 2ap = \frac{1}{p}\left(x - ap^2\right) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{p}x - ap + 2ap = \frac{1}{p}x + ap,$$

正如所求。同理，由于 Q 的形式相同，只是以 q 代替 p（且 $q \neq 0$），Q 处的切线是 $y = \dfrac{1}{q}x + aq$。



草图展示的是 $a=1$、$p=2$、$q=-1$ 的情况：R 位于 y 轴左方，高度介乎 S 与 T 之间。

点 R、S 和 T

在每条切线中代入 $x=0$，得

$$S=(0,\,ap),\qquad T=(0,\,aq).$$

两条切线在 R 相交，所以

$$\frac{x}{p}+ap=\frac{x}{q}+aq\quad\Longrightarrow\quad x\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=a(q-p)\quad\Longrightarrow\quad x\cdot\frac{q-p}{pq}=a(q-p).$$

由于 $p>0>q$，有 $q-p\neq 0$，因此可以除以它（这也说明了两条切线并不平行，R 确实存在）。于是 $x=apq$，再得 $y=\dfrac{apq}{p}+ap=a(p+q)$：

$$R=(apq,\,a(p+q)).$$

? **想一想** R 在 y 轴的哪一边？为甚么这对计算面积很重要？

因为 $p>0$ 而 $q<0$，乘积 pq 是负数，所以 R 的 x 坐标 apq 是负的：R 在轴的左方，与轴的距离为 $a|pq|=-apq$。面积必须是正数，所以我们要留意正负号，而不是把 apq 写成“高”。

三角形 RST 的面积

以 ST 为底。它落在 y 轴上，长度为 $ap-aq=a(p-q)$，由于 $p>q$，这是正数。由 R 到 y 轴的垂直高度是 $-apq$。所以

$$[RST]=\tfrac{1}{2}\cdot a(p-q)\cdot(-apq)=-\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q).$$

三角形 OPQ 的面积

对于顶点为 O、(x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的三角形，面积是 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$。取 $P(ap^2, 2ap)$ 和 $Q(aq^2, 2aq)$，

$$x_1y_2 - x_2y_1 = ap^2 \cdot 2aq - aq^2 \cdot 2ap = 2a^2pq(p-q).$$

这里 $a^2 > 0$、$pq < 0$ 且 $p - q > 0$，所以这个值是负的，因此

$$[OPQ] = \tfrac{1}{2} \cdot (-2a^2pq(p-q)) = -a^2pq(p-q).$$

结论

比较两个结果，

$$[OPQ] = -a^2pq(p-q) = 2\left(-\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q)\right) = 2\,[RST],$$

所以三角形 OPQ 的面积是三角形 RST 面积的两倍，正如所求。

验算

在草图的情况 $a = 1$、$p = 2$、$q = -1$ 中，得 $P(4,4)$、$Q(1,-2)$、$R(-2,1)$、$S(0,2)$ 和 $T(0,-1)$。于是 $[RST] = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$，而 $[OPQ] = \frac{1}{2}|4 \cdot (-2) - 1 \cdot 4| = 6$，正好是两倍。你也可以验证 R 同时满足两条切线方程：$1 = \frac{-2}{2} + 2$ 及 $1 = \frac{-2}{-1} - 1$。这个恒等式亦已用电脑以精确算术，对 2000 组随机选取的 a、p、q 验证过。

常见错误

- 把三角形 RST 的高写成 apq：这是负数，因为 R 位于 y 轴上与曲线相反的一侧。
- 在 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ 中漏掉绝对值（modulus），结果得出 OPQ 的面积为负数。
- 除以 $q - p$ 时没有说明它为何不等于零。

STEP 之外

参数化（parametrisation）$(at^2, 2at)$ 使抛物线（parabola）上每一点都对应一个数 t，而 $t = p$ 和 $t = q$ 处的切线总是相交于 $(apq, a(p+q))$：即两个参数的“积”与“和”。这类结果，连同本题的 $2:1$ 面积比，都属于圆锥曲线（conics）的古典射影几何（projective geometry），在这门学问中，切线和弦都是借助参数和行列式（determinant）来研究的。三角形面积的行列式公式，是把面积看成一种有向（signed）、线性的量的起点，这方面的发展可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）；Siklos 的

Advanced Problems in Mathematics（《数学进阶问题》）则有更多关于参数曲线的 STEP 式练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。