详细解答

STEP I 2017，第 2 题

纯数学 · 对不等式积分

STEP I 2017，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s1-q2

关键思路

积分（integration）保持不等式（inequality）：若在区间 $[a,b]$（其中 $a<b$）上 $f(t)\le g(t)$，则 $\int_a^b f \le \int_a^b g$。唯一要小心的是积分的方向：当 $x<1$ 时，区间 $[1,x]$ 是倒过来走的，不等式便会反转。最后一部分再次用到同一个想法：把一个非负（non-negative）函数由 1 积分到 y，所得结果与 $y-1$ 同号，而这个符号正是我们安全地除去该因子所需要的。

解答

第 (i) 部分

情况 $x\ge 1$。当 $1\le t\le x$ 时，有 $\frac{1}{t}\le 1$，而且区间是正向的，所以

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \le \int_1^x 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{即} \qquad \ln x \le x-1.$$

情况 $0<x\le 1$。现在我们在 $x\le t\le 1$ 上积分，此时 $t\le 1$，故 $\frac{1}{t}\ge 1$。于是

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \ge \int_x^1 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{即} \qquad -\ln x \ge 1-x.$$

乘以 -1 会令不等式反转，再次得到 $\ln x\le x-1$。所以 $(*)$ 对所有 $x>0$ 成立。

第 (ii) 部分

情况 $x\ge 1$。当 $t\ge 1$ 时，有 $\frac{1}{t^2}\le\frac{1}{t}$，所以

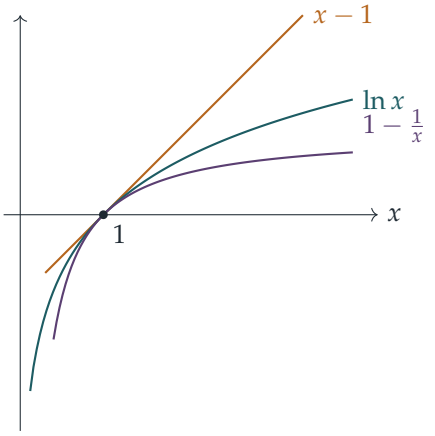
$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{即} \qquad 1-\frac{1}{x}\le \ln x.$$

情况 $0 < x \le 1$。当 $x \le t \le 1$ 时，不等式反转为 $\frac{1}{t^2} \ge \frac{1}{t}$（把 $t \le 1$ 乘以正数 $\frac{1}{t^2}$）。在 $[x, 1]$ 上积分，

$$\frac{1}{x} - 1 \ge -\ln x,$$

再乘以 -1 便得 $\ln x \ge 1 - \frac{1}{x}$。所以 $(**)$ 对所有 $x > 0$ 成立。

（另一方法：$(**)$ 可由 $(*)$ 直接推出：在 $(*)$ 中以 $1/x$ 代替 x，即得 $-\ln x \le \frac{1}{x} - 1$。）



三条曲线在 $x = 1$ 处相切，每条在该点的斜率（gradient）都是 1；$\ln x$ 被夹在另外两条曲线之间。

第 (iii) 部分

$(*)$ 和 $(**)$ 都是说某个函数在 $x > 0$ 上非负：

$$f(x) = x - 1 - \ln x \ge 0, \qquad g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x} \ge 0.$$

我们需要一个关于积分这类函数的简单事实。

想一想 若对所有 $x > 0$ 都有 $h(x) \ge 0$，那么当 $y < 1$ 时，$\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x$ 的符号是甚么？

若 $y > 1$，积分是在正向区间上进行，所以结果 ≥ 0。若 $0 < y < 1$，则 $\int_1^y h = -\int_y^1 h \le 0$。无论哪种情况，都有

$$(y - 1)\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x \ \ge \ 0.$$

这让我们可以把 $y > 1$ 和 $0 < y < 1$ 两种情况一并处理。

我们需要 $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$（以 $u = \ln x$ 用分部积分法（integration by parts）求得），所以

$$\int_1^y \ln x\,\mathrm{d}x = y\ln y - y + 1.$$

*右边的不等式。*对 f 积分，

$$\int_1^y f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(y-1)^2}{2} - (y\ln y - y + 1) = \frac{(y-1)^2}{2} + (y-1) - y\ln y$$
$$= \frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y.$$

由上述事实，

$$(y-1)\left[\frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y\right] \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(y-1)^2(y+1)}{2} \geq y(y-1)\ln y.$$

由于 $y > 0$ 且 $y \neq 1$，$y(y-1)^2$ 是正数，除以它不会改变不等式的方向：

$$\frac{y+1}{2y} \geq \frac{\ln y}{y-1}.$$

*左边的不等式。*对 g 积分，

$$\int_1^y g(x)\,\mathrm{d}x = (y\ln y - y + 1) - (y-1) + \ln y = (y+1)\ln y - 2(y-1).$$

由上述事实，

$$(y-1)[(y+1)\ln y - 2(y-1)] \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad (y+1)(y-1)\ln y \geq 2(y-1)^2.$$

现在除以 $(y+1)(y-1)^2 > 0$：

$$\frac{\ln y}{y-1} \geq \frac{2}{y+1}.$$

把两者合起来，

$$\frac{2}{y+1} \leq \frac{\ln y}{y-1} \leq \frac{y+1}{2y} \qquad \text{对} y > 0,\ y \neq 1,$$

得证。

想一想 为甚么要先乘以 $y-1$ 再除，而不是直接除?

把不等式除以 $y-1$，在 $y < 1$ 时会令不等式反转，迫使我们分开两种情况处理。先乘以 $y-1$，所得的式子含有 $(y-1)^2$，无论我们在 1 的哪一边它都是正数，因此一个论证便可涵盖两种情况。

验算

- 当 $y = 2$：$\frac{2}{3} \approx 0.667 \leq \ln 2 \approx 0.693 \leq \frac{3}{4} = 0.75$。
- 当 $y = \frac{1}{2}$：$\frac{4}{3} \approx 1.333 \leq 2\ln 2 \approx 1.386 \leq \frac{3}{2}$。

- 当 $y \to 1$ 时，三个式子都趋向 1（中间那个是 ln 在 1 处的斜率），与图中曲线相切的情况一致。
- 以 $1/y$ 代替 y，再全式除以 y，会得回完全相同的一对不等式，所以 $0 < y < 1$ 的结果与 $y > 1$ 的结果是等价的。

常见错误

- 当 $x < 1$ 时在 $[1, x]$ 上积分，却没有留意到不等式会反转。
- 除以 $y - 1$ 时没有考虑它的符号，结果只证明了 $y > 1$ 时的第 (iii) 部分。

STEP 之外

中间的量 $\dfrac{\ln y}{y-1}$ 是 1 与 y 的对数平均（logarithmic mean）的倒数，所以左边的不等式是说对数平均不大于算术平均（arithmetic mean）$\frac{1+y}{2}$。事实上，对数平均亦不小于几何平均（geometric mean）$\sqrt{y}$，由此得 $\frac{\ln y}{y-1} \leq \frac{1}{\sqrt{y}}$，这是比 $\frac{y+1}{2y}$ 更精确的上界。对不等式积分这个技巧，以及支持它的积分单调性（monotonicity），都是大学第一门数学分析（analysis）课程的基本工具。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对积分有细致的处理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。