详细解答

STEP I 2017，第 13 题

概率与统计 • 概率的递推关系

STEP I 2017，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s1-q13

关键思路

逐片面包去看，问它是怎样被用掉的：它可以做多士，可以是三文治的第一片，也可以是三文治的第二片。三者恰好发生其一，而前一片面包的情况决定了哪几种是可能的。若第 $r-1$ 片完成了一份小食，第 r 片便开始一份新的小食；若没有完成，第 r 片必然是某份三文治的后半。这样便得到一个一阶递推关系（first-order recurrence），我们用惯常的技巧——减去不动点（fixed point）——来求解。

解答

设置

按使用次序把面包编号为 $1, 2, \ldots, n$。对每一片面包 r，以下情况恰好发生其一：

- T_r：第 r 片用来做多士；
- A_r：第 r 片是某份三文治两片面包中的第一片；
- S_r：第 r 片是某份三文治两片面包中的第二片。

因此 $t_r = \mathrm{P}(T_r)$、$s_r = \mathrm{P}(S_r)$，而 $\mathrm{P}(A_r) = 1 - s_r - t_r$。若 T_r 或 S_r 发生，我们说第 r 片完成一份小食；其概率为 $s_r + t_r$。

第一片面包开始第一份小食，所以它不可能是三文治的第二片：

$$s_1 = 0.$$

（此外，若 $n \geq 2$ 则 $t_1 = p$；若 $n = 1$ 则 $t_1 = 1$。）

两条方程

关于 t_r 的方程。第 r 片开始一份新小食，当且仅当第 $r-1$ 片完成一份小食，其概率为 $s_{r-1}+t_{r-1}$。已知第 r 片开始一份小食，余下的是第 $r, r+1, \ldots, n$ 片；当 $r \le n-1$ 时至少有两片，所以无论之前发生了甚么，我选择多士的概率都是 p。若第 $r-1$ 片没有完成小食，第 r 片便完成一份三文治，不是多士。因此

$$t_r = (s_{r-1} + t_{r-1})\, p \qquad (2 \le r \le n-1).$$

这条式在 $r = n$ 时不成立，因为从最后一片开始的小食必定是多士。

关于 s_r 的方程。第 r 片是三文治的第二片，当且仅当第 $r-1$ 片是三文治的第一片，即第 $r-1$ 片没有完成小食。所以

$$s_r = 1 - (s_{r-1} + t_{r-1}) \qquad (2 \le r \le n).$$

这里不需要对余下片数加任何条件，所以此式一直成立至 $r = n$。

s_r 的递推关系

把第二条方程中的 r 换成 $r+1$，得 $s_r + t_r = 1 - s_{r+1}$，所以第一条方程可写成

$$t_r = p\,(1 - s_r) \qquad (2 \le r \le n-1).$$

当 $n \ge 2$ 时，此式对 $r = 1$ 亦成立，因为 $t_1 = p$ 且 $s_1 = 0$。把 $t_{r-1} = p(1 - s_{r-1})$（在 $1 \le r-1 \le n-1$ 时成立）代入 s_r 的方程：

$$\begin{aligned} s_r &= 1 - s_{r-1} - p(1 - s_{r-1}) \\ &= (1-p)(1 - s_{r-1}) \\ &= q\,(1 - s_{r-1}), \end{aligned}$$

此式对 $2 \le r \le n$ 成立，特别地对 $2 \le r \le n-1$ 成立，正如所求。

解递推关系

> **想一想** 怎样解 $s_r = q - q s_{r-1}$？哪个常数数列满足它？

常数解 $s_r = c$ 需要 $c = q - qc$，所以 $c = \dfrac{q}{1+q}$。从递推关系减去 $c = q - qc$，

$$s_r - \frac{q}{1+q} = -q\left(s_{r-1} - \frac{q}{1+q}\right),$$

所以 $s_r - \frac{q}{1+q}$ 每一步都乘以 $-q$。由 $s_1 - \frac{q}{1+q} = -\frac{q}{1+q}$ 开始，

$$s_r - \frac{q}{1+q} = (-q)^{r-1}\left(-\frac{q}{1+q}\right) = \frac{(-q)^r}{1+q},$$

从而得到

$$s_r = \frac{q + (-q)^r}{1+q} \qquad (1 \le r \le n-1).$$

（由于递推关系一直成立至 $r = n$，同一公式其实对 $r = n$ 亦成立。）

至于 t_r，我们利用 $t_r = p(1 - s_r)$ 及

$$1 - s_r = \frac{1 + q - q - (-q)^r}{1+q} = \frac{1 - (-q)^r}{1+q},$$

所以

$$t_r = \frac{p\big(1 - (-q)^r\big)}{1+q} \qquad (1 \le r \le n-1).$$

最后一片

如上所述，s_r 的方程及递推关系 $s_r = q(1 - s_{r-1})$ 对 $r = n$ 亦成立，所以公式延续下去：

$$s_n = \frac{q + (-q)^n}{1+q}.$$

最后一片不可能是三文治的第一片，因为之后再没有面包。所以它要么是多士，要么是三文治的第二片，故 $t_n = 1 - s_n$：

$$t_n = \frac{1 - (-q)^n}{1+q}.$$

与 $r < n$ 时的 t_r 相比，因子 p 消失了：一份小食若从最后一片开始，必定是多士。（这些公式在 $n = 1$ 时亦成立：它们给出 $s_1 = 0$ 及 $t_1 = 1$。）

验算

- 取 $n = 3$ 及 $p = q = \frac{1}{2}$。可能的次序有：多士—多士—多士（概率 $\frac{1}{4}$）、先多士后三文治（概率 $\frac{1}{4}$）、先三文治后多士（概率 $\frac{1}{2}$）。所以 $s_3 = \frac{1}{4}$ 而 $t_3 = \frac{3}{4}$。公式给出 $s_3 = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$ 及 $t_3 = \dfrac{1 + \frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}$。
- 当 $q = 0$（永远做多士）时，对每个 r 都得 $s_r = 0$ 及 $t_r = 1$，理应如此。
- 当 r 增大时，$s_r \to \frac{q}{1+q}$。这是合理的：长远而言，有比例 q 的小食是三文治，每份有一片“第二片”，而每份小食平均用 $1 + q$ 片面包，所以有比例 $\frac{q}{1+q}$ 的面包是第二片。
- 我们用电脑对 $n \le 12$ 及若干 p 值，精确列举所有小食序列，验证了全部公式。

常见错误

- 使用 $t_n = p(s_{n-1} + t_{n-1})$：当一份小食从最后一片开始时，它是多士的概率是 1，而不是 p。
- 以为事件“第 $r-1$ 片是多士”与“第 r 片是多士”互相独立（independent）。其实并不独立：关键在于第 r 片是否开始一份小食，而这取决于之前的历史。
- 解递推关系时丢失负号：公比是 $-q$，所以答案围绕 $\frac{q}{1+q}$ 交替摆动。

STEP 之外

第 r 片是否开始一份新小食，构成一个简单的*更新过程*（renewal process）：各份小食的长度互相独立，每份是 1 或 2，而极限 $\frac{q}{1+q}$ 正是更新定理（renewal theorem）的一个例子（长远的更新率等于平均间隔的倒数）。等价地，每片面包的类型构成一条马可夫链（Markov chain），而 $(-q)^r$ 显示它遗忘起始状态的速度。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）同时涵盖马可夫链及这类递推关系。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。