详细解答

STEP I 2017，第 11 题

力学 • 涉及摩擦力的刚体静力学

> **STEP I 2017，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q11

关键思路

一切都发生在箱子的一个铅垂截面内，而这个截面是一个倾斜了 α 的正方形。因此自然的坐标轴应沿箱底和沿箱侧向上，而不是水平和铅垂方向：这样两个法向反作用力（normal reaction）都沿坐标轴，只有重量需要分解。两次分解力给出法向反作用力之间的一条关系，对中点取力矩（moment）的方程（重量在此不产生力矩）给出第二条关系，再利用 tan 的复角公式（compound-angle formula）比较两者，便得出答案。

解答

模型与受力

把杆视为均匀刚性杆（uniform rigid rod），并在包含它的铅垂平面内讨论。在这个平面内，箱底沿最大斜率线（line of greatest slope）放置，与水平成角 α，而经过 O 的箱侧与箱底垂直。在 O 取坐标轴：

- x 沿箱底，指向斜面上方（朝向 A）；
- y 沿箱侧，垂直于斜面（朝向 B）。

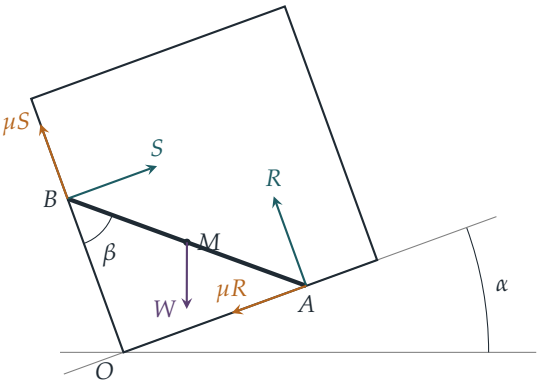
箱侧与箱底垂直，所以三角形 OAB 在 O 处为直角，而 B 处的角为 β。因此

$$OA = 2L\sin\beta, \qquad OB = 2L\cos\beta.$$

设 $\mu = \tan\gamma$。杆所受的力为：

- 在 A：沿 $+y$ 方向的法向反作用力 R，以及朝向 O（即 $-x$ 方向）的摩擦力 μR，因为 A 即将向远离 O 的方向滑动，而摩擦力处于极限状态（limiting）；

- 在 B：沿 $+x$ 方向的法向反作用力 S，以及远离 O（即 $+y$ 方向）的摩擦力 μS，因为 B 即将朝 O 滑动；
- 作用于中点 M、铅垂向下的重量 W。y 轴与向上的铅垂方向成角 α，所以重量沿 x 的分量为 $-W\sin\alpha$，沿 y 的分量为 $-W\cos\alpha$。



分解力

沿箱底（x）及沿箱侧向上（y）：

$$S-\mu R-W\sin\alpha=0, \tag{1}$$

$$R+\mu S-W\cos\alpha=0. \tag{2}$$

由于 $R+\mu S=W\cos\alpha\neq 0$，把 (1) 除以 (2) 得

$$\frac{S-\mu R}{R+\mu S}=\tan\alpha. \tag{3}$$

对中点取力矩

重量作用于 M，所以它对 M 没有力矩。相对于 M，点 A 位于 $(L\sin\beta,\,-L\cos\beta)$，而 B 位于 $(-L\sin\beta,\,L\cos\beta)$。按图中逆时针方向取力矩（作用于相对位置 (p,q) 的力 (F_x,F_y) 的力矩为 pF_y-qF_x）：

$$\text{在}A:\quad L\sin\beta\cdot R-(-L\cos\beta)(-\mu R)=LR(\sin\beta-\mu\cos\beta),$$

$$\text{在}B:\quad -L\sin\beta\cdot\mu S-L\cos\beta\cdot S=-LS(\cos\beta+\mu\sin\beta).$$

两者之和必须为零，所以

$$R(\sin\beta-\mu\cos\beta)=S(\cos\beta+\mu\sin\beta).$$

现在代入 $\mu = \tan\gamma$，并把整条式乘以 $\cos\gamma$（它是正数）：

$$R(\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma) = S(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma),$$
$$\text{即}\quad R\sin(\beta-\gamma) = S\cos(\beta-\gamma).$$

想一想 我们可以除以 R 和 $\cos(\beta-\gamma)$ 吗?

两个法向反作用力都是推力，所以 $R>0$ 且 $S>0$。于是 $\sin(\beta-\gamma)$ 与 $\cos(\beta-\gamma)$ 不可能同时为零；又因为 $S\cos(\beta-\gamma) = R\sin(\beta-\gamma)$ 且 $R,S>0$，两者同号，所以两者都不为零，并且 $\tan(\beta-\gamma)>0$。由于 β 和 γ 都在 $(0,\frac{1}{2}\pi)$ 内，$\beta-\gamma$ 在 $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ 内，因此事实上

$$\frac{S}{R} = \tan(\beta-\gamma), \qquad 0<\beta-\gamma<\tfrac{1}{2}\pi. \tag{4}$$

综合起来

把 (3) 左边的分子和分母都除以 R，并记 $k = S/R = \tan(\beta-\gamma)$ 及 $\mu = \tan\gamma$：

$$\tan\alpha = \frac{k-\mu}{1+k\mu} = \frac{\tan(\beta-\gamma)-\tan\gamma}{1+\tan(\beta-\gamma)\tan\gamma} = \tan\big((\beta-\gamma)-\gamma\big) = \tan(\beta-2\gamma),$$

这里用了复角公式（分母 $1+k\mu$ 是正数，所以没有任何无定义的情况）。由 (4) 及 $0<\gamma<\frac{1}{2}\pi$，

$$\beta-2\gamma = (\beta-\gamma)-\gamma \in \left(-\tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{1}{2}\pi\right),$$

而且 $\alpha\in(0,\frac{1}{2}\pi)$ 亦成立。正切函数在 $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ 上是一对一（one-to-one）的，所以 $\tan\alpha = \tan(\beta-2\gamma)$ 迫使

$$\beta = \alpha + 2\gamma,$$

得证。这与题目所给的条件 $\alpha<\beta$ 相符；它亦告诉我们，这种状态只有在 $\alpha+2\gamma<\frac{1}{2}\pi$ 时才可能出现。

验算

- 光滑箱子：当 $\gamma=0$ 时，结果表示 $\beta=\alpha$。可以直接验证：没有摩擦时，两个法向反作用力相交于 P，即以 AB 为对角线、边沿箱子方向的长方形的第四个顶点。三个力处于平衡时必须共点（concurrent），所以重量经过 M 的作用线必须经过 P，即 MP 是铅垂的。对角线 MP 平行于把 OB 向远离 O 的方向转过 β 后的方向，而 OB 本身朝 O 的一侧与铅垂成 α 倾斜；所以 MP 与铅垂成 $\beta-\alpha$，并且恰好在 $\beta=\alpha$ 时是铅垂的。
- 数值例子：取 $\alpha=20^\circ$、$\gamma=15^\circ$，所以 $\beta=50^\circ$。于是 (1) 和 (2) 给出 $R\approx 0.791W$ 及 $S\approx 0.554W$（两者皆为正），$S/R\approx 0.700\approx\tan 35^\circ$，而对 M 的总力矩算出来为零。

常见错误

- 沿水平和铅垂方向分解力：这样做可行，但四个接触力每一个都需要分解，代数运算会繁重得多。
- 弄错摩擦力的方向。摩擦力与即将发生的运动方向相反：在 A 朝向 O，在 B 远离 O（沿箱侧向上）。
- 由 $\tan\alpha = \tan(\beta - 2\gamma)$ 直接下结论，却没有说明为何两个角都位于 tan 为一对一的区间内。

STEP 之外

把摩擦力写成 μR 并令 $\mu = \tan\gamma$，正是*摩擦角*（angle of friction）的概念：在极限平衡（limiting equilibrium）时，总接触力位于一个以法线为轴、半顶角为 γ 的“摩擦锥”（friction cone）的边缘上。关于刚体倚靠粗糙表面的问题，于是变成关于这些锥体以及三力共点的几何问题；同一幅图像亦是楔子、梯子以及叠放物体稳定性等问题的基础。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）从基本原理出发，细致地发展了刚体静力学和力矩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。